

N. PISKUNOV

cálculo diferencial e integral

tomo I

Editorial



Mir Moscú



Н. С. ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ

I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

N. PISKUNOV

**CALCULO
DIFERENCIAL
E INTEGRAL**

3^a edición

TOMO

I

EDITORIAL MIR · MOSCU

Traducido del ruso por el ingeniero
K. MEDKOV

(на испанском языке)

Impreso en la URSS

© Traducción al español. Editorial Mir. 1977

INDICE

PREFACIO

CAPITULO I. NUMERO. VARIABLE. FUNCION

§ 1. Números reales. Representación de números reales por medio de puntos en el eje numérico	7
§ 2. Valor absoluto del número real	9
§ 3. Magnitudes variables y constantes	10
§ 4. Campo de variación de la magnitud variable	11
§ 5. Variable ordenada. Variables crecientes y decrecientes. Variable acotada	13
§ 6. Función	14
§ 7. Formas de expresión de funciones	15
§ 8. Funciones elementales fundamentales. Funciones elementales	17
§ 9. Funciones algebraicas	22
§ 10. Sistema de coordenadas polares	24

Ejercicios para el capítulo I

CAPITULO II. LIMITE. CONTINUIDAD DE LA FUNCION

§ 1. Límite de la magnitud variable. Variable infinitamente grande	28
§ 2. Límite de la función	31
§ 3. Función que tiende al infinito. Funciones acotadas	34
§ 4. Infinitesimales y sus principales propiedades	38
§ 5. Teoremas fundamentales sobre límites	42
§ 6. Límite de la función $\frac{\text{sen } x}{x}$, cuando $x \rightarrow 0$	46
§ 7. Número e	48
§ 8. Logaritmos naturales	53

§ 9. Continuidad de las funciones	54
§ 10. Algunas propiedades de las funciones continuas	59
§ 11. Comparación de las magnitudes infinitesimales	62
<i>Ejercicios para el capítulo II</i>	

CAPITULO III. DERIVADA Y DIFERENCIAL

§ 1. Velocidad del movimiento	68
§ 2. Definición de la derivada	70
§ 3. Interpretación geométrica de la derivada	72
§ 4. Derivación de las funciones	74
§ 5. Derivadas de las funciones elementales. Derivada de la función $y = x^n$, siendo n entero y positivo	76
§ 6. Derivadas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$; $y = \cos x$	78
§ 7. Derivadas de una magnitud constante, del producto de una magnitud constante por una función, de una suma, producto y cociente	79
§ 8. Derivada de la función logarítmica	84
§ 9. Derivada de la función compuesta	85
§ 10. Derivadas de las funciones $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$, $y = \ln x $	88
§ 11. Función implícita y su derivación	90
§ 12. Derivadas de la función potencial con exponente real cualquiera, de la función exponencial y de la función exponencial compuesta	92
§ 13. Función inversa y su derivación	94
§ 14. Funciones trigonométricas inversas y su derivación	98
§ 15. Tabla de las fórmulas fundamentales para la derivación	103
§ 16. Representación paramétrica de función	104
§ 17. Ecuaciones paramétricas de algunas curvas	106
§ 18. Derivada de la función dada paraméricamente	109
§ 19. Funciones hiperbólicas	111
§ 20. Diferencial	114
§ 21. Significado geométrico de la diferencial	118
§ 22. Derivadas de diversos órdenes	119
§ 23. Diferenciales de diversos órdenes	122
§ 24. Derivadas de diversos órdenes de funciones implícitas y de funciones representadas paraméricamente	123
§ 25. Interpretación mecánica de la segunda derivada	126
§ 26. Ecuaciones de la línea tangente y de la normal. Longitudes de la línea subtangente y de la subnormal	127
§ 27. Interpretación geométrica de la derivada del radio vector respecto al ángulo polar	130
<i>Ejercicios para el capítulo III</i>	

CAPITULO IV. TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

§ 1. Teorema sobre las raíces de la derivada (Teorema de Rolle)	141
§ 2. Teorema sobre los incrementos finitos (Teorema de Lagrange)	143
§ 3. Teorema sobre la razón de los incrementos de dos funciones (Teorema de Cauchy)	145
§ 4. Límite de la razón de dos infinitesimales («Cálculo de límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ »)	146
§ 5. Límite de la razón de dos magnitudes infinitamente grandes («Cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ »)	149
§ 6. Fórmula de Taylor	155
§ 7. Desarrollo de las funciones e^x , $\sin x$ y $\cos x$ por la fórmula de Taylor	159
<i>Ejercicios para el capítulo IV</i>	

CAPITULO V. ANALISIS DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES

§ 1. Generalidades	166
§ 2. Crecimiento y decrecimiento de una función.	167
§ 3. Máximo y mínimo de las funciones	169
§ 4. Análisis del máximo y mínimo de una función derivable mediante la primera derivada	175
§ 5. Análisis del máximo y mínimo de una función mediante la segunda derivada	178
§ 6. Valores máximo y mínimo de una función en un segmento	182
§ 7. Aplicación de la teoría de máximos y mínimos de las funciones a la solución de problemas	183
§ 8. Análisis de los valores máximo y mínimo de una función mediante la fórmula de Taylor	185
§ 9. Convexidad y concavidad de la curva. Puntos de inflexión	188
§ 10. Asíntotas	194
§ 11. Esquema general del análisis de funciones y de la construcción de gráficas	199
§ 12. Análisis de las curvas dadas en forma paramétrica	204
<i>Ejercicios para el capítulo V</i>	

CAPITULO VI. CURVATURA DE UNA CURVA

§ 1. Longitud del arco y su derivada	214
§ 2. Curvatura	216
§ 3. Cálculo de la curvatura	218
§ 4. Cálculo de la curvatura de una curva dada en forma paramétrica	221
§ 5. Cálculo de la curvatura de una curva dada en coordenadas polares	222
§ 6. Radio y círculo de curvatura. Centro de curvatura. Evoluta y evolvente	224
§ 7. Propiedades de la evoluta	229
§ 8. Cálculo aproximado de las raíces reales de una ecuación	233
<i>Ejercicios para el capítulo VI</i>	

CAPITULO VII. NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

§ 1. Números complejos. Generalidades	241
§ 2. Operaciones fundamentales con números complejos	243
§ 3. Elevación a potencia y extracción de la raíz del número complejo	246
§ 4. Función exponencial con exponente complejo y sus propiedades	249
§ 5. Fórmula de Euler. Forma exponencial del número complejo	252
§ 6. Desarrollo del polinomio en factores	253
§ 7. Raíces múltiples del polinomio	257
§ 8. Factorización de un polinomio con raíces complejas	258
§ 9. Interpolación. Fórmula de la interpolación de Lagrange	259
§ 10. Fórmula de la interpolación de Newton	262
§ 11. Derivación numérica	264
§ 12. Óptima aproximación de las funciones por medio de polinomios. Teoría de Chébishev	265
<i>Ejercicios para el capítulo VII</i>	

CAPITULO VIII. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. Definición de las funciones de varias variables	268
§ 2. Representación geométrica de una función de dos variables	271

§ 3. Incremento parcial y total de la función . . .	272
§ 4. Continuidad de la función de varias variables . . .	274
§ 5. Derivadas parciales de la función de varias variables . . .	277
§ 6. Interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función de dos variables . . .	279
§ 7. Incremento total y diferencial total . . .	280
§ 8. Aplicación de la diferencial total para cálculos aproximados . . .	284
§ 9. Utilización de la diferencial para evaluar el error de cálculo . . .	286
§ 10. Derivada de una función compuesta. Derivada total . . .	290
§ 11. Derivada de una función definida implícitamente . . .	292
§ 12. Derivadas parciales de diferentes órdenes . . .	296
§ 13. Superficies de nivel . . .	300
§ 14. Derivada siguiendo una dirección . . .	301
§ 15. Gradiente . . .	304
§ 16. Fórmula de Taylor para una función de dos variables . . .	307
§ 17. Máximo y mínimo de una función de varias variables . . .	309
§ 18. Máximo y mínimo de la función de varias variables relacionadas mediante ecuaciones dadas (máximos y mínimos condicionados) . . .	318
§ 19. Obtención de una función a base de datos experimentales según el método de cuadrados mínimos . . .	323
§ 20. Puntos singulares de una curva . . .	328
<i>Ejercicios para el capítulo VIII</i>	

CAPÍTULO IX. APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL A LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

§ 1. Ecuaciones de la curva en el espacio . . .	337
§ 2. Límite y derivada de una función vectorial de un argumento escalar. Ecuación de la tangente a una curva. Ecuación del plano normal . . .	340
§ 3. Reglas de derivación de los vectores (funciones vectoriales) . . .	347
§ 4. Derivadas primera y segunda de un vector respecto a la longitud del arco. Curvatura de la curva. Normal principal. Velocidad y aceleración del punto durante el movimiento curvilíneo . . .	350
§ 5. Plano osculador. Binormal. Torsión . . .	360
§ 6. Plano tangente y normal a una superficie . . .	365
<i>Ejercicios para el capítulo IX</i>	

CAPITULO X. INTEGRAL INDEFINIDA

§ 1. Función primitiva e integral indefinida . . .	372
§ 2. Tabla de integrales	375
§ 3. Algunas propiedades de la integral indefinida . . .	377
§ 4. Integración por cambio de variable o por sustitución . .	379
§ 5. Integrales de ciertas funciones que contienen un trinomio cuadrado	381
§ 6. Integración por partes	385
§ 7. Fracciones racionales. Fracciones racionales elementales y su integración	388
§ 8. Descomposición de la fracción racional en fracciones simples	392
§ 9. Integración de las fracciones racionales	397
§ 10. Método de Ostrogradski	400
§ 11. Integrales de las funciones irracionales	403
§ 12. Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. . .	405
§ 13. Integración de los binomios diferenciales	408
§ 14. Integración de ciertas clases de funciones trigonométricas	411
§ 15. Integración de ciertas funciones irracionales con ayuda de sustituciones trigonométricas.	416
§ 16. Funciones cuyas integrales no pueden expresarse mediante las funciones elementales	418
<i>Ejercicios para el capítulo X</i>	

CAPITULO XI. INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. Planteo del problema. Sumas integrales inferior y superior	428
§ 2. Integral definida	430
§ 3. Propiedades fundamentales de la integral definida . . .	437
§ 4. Cálculo de la integral definida. Fórmula de Newton-Leibniz	441
§ 5. Sustitución de variable en una integral definida	445
§ 6. Integración por partes	447
§ 7. Integrales impropias	450
§ 8. Cálculo aproximado de las integrales definidas	458
§ 9. Fórmula de Chébishev	464
§ 10. Integrales dependientes de un parámetro	469
§ 11. Integración de una función compleja de una variable real.	473
<i>Ejercicios para el capítulo XI</i>	

**CAPITULO XII. APLICACIONES GEOMETRICAS
Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA**

§ 1. Cálculos de áreas en coordenadas rectangulares	478
§ 2. Area de un sector curvilíneo en coordenadas polares	481
§ 3. Longitud de un arco de curva	483
§ 4. Cálculo del volumen de un cuerpo en función de las áreas de secciones paralelas	489
§ 5. Volumen de un cuerpo de revolución	491
§ 6. Area de un cuerpo de revolución	492
§ 7. Cálculo del trabajo con ayuda de la integral definida	494
§ 8. Coordenadas del centro de gravedad	496
§ 9. Cálculo del momento de inercia de una línea, de un círculo y de un cilindro mediante la integral definida	500
<i>Ejercicios para el capítulo XII.</i>	503
<i>Índice alfabético de materias</i>	509
<i>Índice</i>	513

PREFACIO

La presente obra es la primera versión al idioma español y le sirve de base la séptima edición en ruso.

En esta versión el autor introdujo una serie de suplementos y modificaciones que contribuyen a la mejor asimilación del curso.

Todo el curso está dividido en dos tomos: el primero incluye los capítulos I-XII; el segundo, XIII-XIX.

Los dos primeros capítulos del tomo I, «Número, Variable, Función» y «Límite, Continuidad de la función», están escritos en la forma más breve posible. Algunos problemas que habitualmente se analizan en relación con estas nociones, en el curso dado, sin perjudicar su comprensión, se examinan en capítulos posteriores. Esto da la oportunidad de pasar, cuanto antes posible, al estudio de la noción principal de cálculo diferencial, la derivada, lo que requieren otras asignaturas de la enseñanza superior (la experiencia pedagógica del autor dicta esta distribución del material).

Con el fin de facilitar a los estudiantes la obtención de los conocimientos matemáticos necesarios para el estudio de las disciplinas relacionadas con las máquinas calculadoras y sistemas automáticos (que se estudian actualmente en los centros de enseñanza técnica superior), en el segundo tomo están detalladamente expuestos los siguientes temas: «Integración numérica de las ecuaciones diferenciales y de los sistemas de ecuaciones diferenciales», «Integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales», «Noción de la teoría de la estabilidad de Liapunov», «Operador de Hamilton», «Integral de Fourier», etc.

En particular, se ha aumentado el número de problemas que se dan junto con sus soluciones; también se introdujeron varios problemas de elevada dificultad cuya solución requiere el conocimiento más profundo sobre la materia. Los problemas y ejemplos, como también sus soluciones, están elegidos para cada tema de tal forma que contribuyan a la mejor comprensión del curso, circunstancia que además hace el libro más cómodo para aquellas personas que quieren estudiar las matemáticas individualmente y, en particular, para los estudiantes por correspondencia.

En conclusión, expreso mi profunda gratitud a la Editorial Mir por la traducción y publicación de esta mi obra.

N. PISKUNOV

NUMERO. VARIABLE. FUNCION

§ 1. NUMEROS REALES. REPRESENTACION
DE NUMEROS REALES POR MEDIO DE PUNTOS
EN EL EJE NUMERICO

Uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas es el número. El concepto de número surgió en la antigüedad, ampliándose y generalizándose con el tiempo.

Los números enteros y fraccionarios, tanto positivos como negativos, así como el número cero, se llaman *números racionales*. El número racional puede expresarse como la razón $\frac{p}{q}$ de dos números enteros p y q . Por ejemplo:

$$\frac{5}{4}; \quad 1,25 = \frac{5}{4}.$$

En particular, el número entero p se puede considerar como la razón de dos números enteros $\frac{p}{1}$, por ejemplo:

$$6 = \frac{6}{1}; \quad 0 = \frac{0}{1}.$$

Los números racionales pueden representarse por fracciones periódicas finitas o por indefinidas. Los números en forma de fracciones decimales indefinidas no periódicas, se denominan *números irracionales*; por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5 - \sqrt{2}$, etc.

La reunión de los números racionales e irracionales se denomina conjunto de números reales. Estos se ordenan según su magnitud, es decir, que para cualquier par de números reales x e y existe una correlación, y sólo una, de las siguientes:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Los números reales se pueden expresar por medio de puntos en el eje numérico. Se llama *eje numérico* a una recta infinita en la cual están determinados:

- un punto O que se denomina origen;
- una dirección positiva que se indica con una flecha;
- una escala para medir longitudes.

En general dispondremos el eje numérico en posición horizontal, considerando positiva la dirección hacia la derecha del punto O (origen).

Si el número x_1 es positivo, se representa por el punto M_1 . Este se situará a la derecha del punto O a una distancia $OM_1 = x_1$; si el número x_2 es negativo, estará representado por el punto M_2 . Éste estará situado a la izquierda del punto O , a una distancia $OM_2 = -x_2$ (fig. 1). El punto O representa el número cero. Es evidente que cada

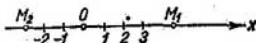


Fig. 1.

número real está representado por un punto en el eje numérico. Dos números reales diferentes están representados en el eje por dos puntos distintos. Es decir, cada punto del eje numérico representa un solo número real, ya sea racional o irracional.

Así pues, entre todos los números reales y puntos del eje numérico existe una correspondencia biunívoca: a cada número le corresponde un solo punto que lo representa en el eje numérico, y recíprocamente, a cada punto corresponde un sólo número. Entonces, «número x » y «punto x » son sinónimos y así los utilizaremos en este manual.

Aceptemos, sin demostración, esta importante propiedad del conjunto de números reales: *entre dos números reales arbitrarios siempre se pueden hallar números, tanto racionales como irracionales*. En lenguaje geométrico esta propiedad se enunciará así: *entre dos puntos arbitrarios del eje numérico siempre podrán situarse puntos, tanto racionales como irracionales*.

Como conclusión, enunciaremos el siguiente teorema que nos servirá, en algún sentido, de «puente entre la teoría y la práctica»:

Teorema. *Todo número irracional α se puede expresar con cualquier grado de precisión por medio de números racionales.*

En efecto, siendo el número irracional $\alpha > 0$, calculemos α con un error no mayor de $\frac{1}{n}$ (por ejemplo, de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc.).

Cualquiera que sea el número α , está comprendido entre dos números enteros consecutivos N y $N + 1$. Dividamos el segmento comprendido entre N y $N + 1$ en n partes, entonces el número α resultará comprendido entre los números racionales $N + \frac{m}{n}$ y

$N + \frac{m+1}{n}$. Dado que la diferencia entre estos números es $\frac{1}{n}$, cada uno de ellos expresa α con un grado de precisión predeterminado: el primero por defecto, y el segundo por exceso.

Ejemplo: El número irracional $\sqrt{2}$ se expresa por medio de números racionales:

1,4 y 1,5: con un error no mayor de $\frac{1}{10}$;

1,41, y 1,42: con error no mayor de $\frac{1}{100}$;

1,414 y 1,415: con un error no mayor de $\frac{1}{1000}$, etc.

§ 2. VALOR ABSOLUTO DEL NÚMERO REAL

Introduzcamos el concepto de valor absoluto del número real. Este concepto es imprescindible para continuar adelante.

Definición. Un número real no negativo, que satisface las condiciones:

$$|x| = x, \text{ si } x \geq 0;$$

$$|x| = -x, \text{ si } x < 0.$$

se llama valor absoluto (o módulo) de un número real x (su notación es $|x|$).

Ejemplos: $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

De la definición se deduce que para cualquier número x se verifica la correlación $x \leq |x|$.

Examinemos algunas propiedades de los valores absolutos.

1. *El valor absoluto de la suma algebraica de varios números reales no es mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Demostración. Sea $x + y \geq 0$. Entonces:

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y| \text{ (ya que } x \leq |x| \text{ e } y \leq |y| \text{)}.$$

Supongamos ahora que $x + y < 0$. Entonces:

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|,$$

como se trataba de demostrar.

Esta demostración se puede generalizar fácilmente para cualquier número de sumandos.

Ejemplos:

$$|-2+3| < |-2|+|3|=2+3=5 \text{ ó } 1 < 5;$$

$$|-3-5| = |-3|+|-5|=3+5=8 \text{ u } 8=8.$$

2. El valor absoluto de la diferencia de dos números no es menor que la diferencia de los valores absolutos del minuendo y sustraendo:

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

Demostración. Supongamos que $x - y = z$. Entonces $x = y + z$, y según lo demostrado anteriormente, se tiene:

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

de donde:

$$|x| - |y| \leq |x - y|,$$

como se trataba de demostrar.

3. El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores:

$$|xyz| = |x| |y| |z|.$$

4. El valor absoluto del cociente es igual al cociente de dividir el valor absoluto del dividendo por el del divisor:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Las dos últimas propiedades provienen directamente de la definición de valor absoluto.

§ 3. MAGNITUDES VARIABLES Y CONSTANTES

Al medir magnitudes físicas: tiempo, longitud, área, volumen, masa, velocidad, presión, temperatura, etc., se obtienen sus valores numéricos. Las matemáticas tratan del estudio de las magnitudes, haciendo abstracción de su contenido concreto. Es por ello que, al hablar de magnitudes, tendremos en cuenta, en lo sucesivo, sus valores numéricos. Hay fenómenos en que algunas magnitudes van cambiando, es decir, alteran su valor numérico y otras lo mantienen constante. Por ejemplo, en el movimiento uniforme de un punto varían el tiempo y la distancia, mientras que la velocidad permanece constante.

Magnitud variable, o simplemente variable, es la que puede adquirir distintos valores numéricos. La magnitud, cuyo valor numérico no se altera, se denomina *constante*. En adelante, las variables se designarán con las letras, $x, y, z, u \dots$, etc., y las magnitudes constantes con las letras $a, b, c \dots$, etc.

Observación. En matemáticas, la constante se considera con frecuencia como un caso particular de una magnitud variable cuyos valores numéricos son todos iguales.

Conviene tener en cuenta que, en condiciones físicas concretas, una misma magnitud puede ser constante en un fenómeno y variable en otro. Por ejemplo, la velocidad en el movimiento uniforme es una magnitud constante y en el movimiento uniformemente acelerado, una magnitud variable.

Las magnitudes cuyo valor numérico permanece invariable en cualquier fenómeno se denominan *constantes absolutas*. Por ejemplo, la razón de la longitud de la circunferencia y su diámetro es una magnitud constante, llamada $\pi \approx 3,14159$.

Más adelante veremos que el concepto de variable es fundamental en el cálculo diferencial e integral. Federico Engels escribe en «Dialéctica de la naturaleza»: «El punto de viraje de las matemáticas fue la magnitud variable de Descartes. Esto introdujo en las matemáticas el movimiento y, con él, la dialéctica y también, por tanto, y necesariamente, el cálculo diferencial e integral».

§ 4. CAMPO DE VARIACION DE LA MAGNITUD VARIABLE

Una magnitud variable puede tomar diversos valores numéricos. Según el problema que se considere, el conjunto de estos valores puede ser también diferente. Por ejemplo, la temperatura del agua, al calentarla en condiciones normales, variará desde $15-18^{\circ}\text{C}$ hasta

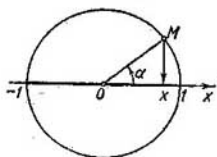


Fig. 2.

el punto de ebullición; es decir, hasta 100°C . La variable $x = \cos \alpha$ puede tomar todos los valores comprendidos entre -1 y $+1$.

Los valores de una magnitud variable se representan geoméricamente por medio de puntos en el eje numérico. Por ejemplo, los valores de la variable $x = \cos \alpha$ son representados por un conjunto de puntos del segmento en el eje numérico, desde -1 hasta $+1$, incluyendo estos puntos, para todos los valores de α (fig. 2).

Definición. El conjunto de todos los valores numéricos de la magnitud variable se denomina *campo de variación* de la variable.

Determinemos los siguientes campos de variación de la variable que con frecuencia aparecerán más adelante.

Recibe el nombre de *intervalo* el conjunto de todos los valores numéricos de x comprendidos entre dos números dados a y b ($a < b$), a excepción de los extremos, es decir, a y b no entran en el conjunto analizado de números. La notación del intervalo es: (a, b) o, mediante las desigualdades, $a < x < b$.

El conjunto de todos los valores numéricos de x comprendidos entre los números dados a y b , incluidos estos, es decir, a y b que entran en el conjunto analizado se llama *segmento*. La notación del segmento es: $[a, b]$, o, mediante las desigualdades, $a \leq x \leq b$. A veces el segmento recibe el nombre de *intervalo cerrado*.

En el caso de que uno de los números, a o b (a , por ejemplo), se una al intervalo, y el otro no, se obtiene un *intervalo semicerrado*, que puede ser expresado por las desigualdades $a \leq x < b$ y cuya notación es $[a, b)$. Si se une al intervalo el número b , excluyéndose a , se obtiene el intervalo semicerrado $(a, b]$, que puede expresarse por medio de las desigualdades

$$a < x \leq b.$$

Si la variable x adquiere todos los valores posibles, mayores que a , el intervalo se representa por $(a, +\infty)$ y se determina por las desigualdades convencionales

$$a < x < +\infty.$$

De esta misma manera se determinan los intervalos infinitos y los infinitos semicerrados, que son dados por las desigualdades convencionales:

$$a \leq x < +\infty; -\infty < x < c; -\infty < x \leq c; -\infty < x < +\infty.$$

Ejemplo: El campo de variación de la variable $x = \cos \alpha$, para cualesquiera valores de α , es un segmento $[-1, 1]$ que se determina por las desigualdades $-1 \leq x \leq 1$.

Las definiciones arriba citadas pueden formularse también utilizando el concepto «punto» en lugar del concepto «número». Por ejemplo:

El conjunto de todos los puntos x comprendidos entre los puntos dados a y b (*extremos del segmento*), cuando estos pertenecen al conjunto considerado, se llama *segmento*.

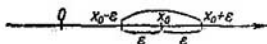


Fig. 3.

El intervalo arbitrario (a, b) que contiene un punto dado x_0 , es decir, el intervalo (a, b) cuyos extremos satisfacen la condición $a < x_0 < b$, se denomina *vecindad* de este punto. Con frecuencia

ocurre que el intervalo (a, b) es considerado como vecindad (a, b) del punto x_0 en que x_0 es el centro. En este caso, el punto x_0 recibe el nombre de *centro de la vecindad*; la magnitud $\frac{b-a}{2}$ se denomina *radio de la vecindad*. La fig. 3 representa la vecindad $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ del punto x_0 , cuyo radio es ε .

§ 5. VARIABLE ORDENADA. VARIABLES CRECIENTES Y DECRECIENTES. VARIABLE ACOTADA

Por convención, una variable x es *ordenada*, si se conoce su campo de variación y se puede precisar para cada par de sus valores, cuál de ellos es anterior y cuál posterior. Aquí, los conceptos «anterior» y «posterior» no se hallan relacionados con el tiempo, sirviendo sólo como el método de ordenación de los valores de la variable, es decir, el establecimiento de un cierto orden para los valores correspondientes de esta variable.

La sucesión numérica $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots$, puede considerarse como caso particular de una variable ordenada, donde, siendo $k' < k$, el valor $x_{k'}$ es anterior y el valor x_k posterior, sin dar importancia cuál de estos dos valores sea mayor.

Definición 1. La variable se denomina *creciente*, si cada su valor posterior es mayor que el anterior. Por el contrario, si cada valor posterior es menor que el anterior, la variable se denomina *decreciente*.

Las variables crecientes y decrecientes reciben el nombre de *monótonas*.

Ejemplo: Al duplicar el número de lados de un polígono regular inscrito en un círculo, el área s de este polígono es una variable creciente. Si duplicamos el número de lados de un polígono regular circunscrito alrededor de un círculo, su área es una variable decreciente. Obsérvese que no toda variable ha de ser forzosamente creciente o decreciente. Por ejemplo, la variable $x = \sin \alpha$ no es monótona, siendo α una magnitud creciente en el segmento $[0, 2\pi]$. Esta crece, al principio, de 0 a 1 y disminuye después de 1 a -1 , para luego crecer de nuevo de -1 a 0.

Definición 2. La variable x se denomina *magnitud acotada*, si existe un número constante $M > 0$ tal que, a partir de cierto valor, todos los posteriores satisfagan la condición.

$$-M \leq x \leq M, \text{ es decir, } |x| \leq M.$$

Es decir, una variable se llama *acotada*, si se puede indicar un segmento $[-M, M]$ tal que, a partir de cierto valor de la misma, todos sus valores posteriores pertenezcan al segmento indicado. Sin embargo, no hay que pensar que la variable tome necesariamente todos los valores del segmento $[-M, M]$. Por ejemplo, una variable

que toma diferentes valores racionales en el segmento $[-2, 2]$, es acotada. Sin embargo, ésta no toma en este segmento valores irracionales.

§ 6. FUNCION

Al estudiar diversos fenómenos de la naturaleza y resolver problemas técnicos, y, por consiguiente, matemáticos, surge la necesidad de examinar la variación de una magnitud en dependencia de la variación de otra. Por ejemplo, al estudiar el movimiento, el espacio recorrido se considera como una variable que cambia en dependencia de la variación del tiempo. De este modo el espacio recorrido es *función* del tiempo.

Veamos otro ejemplo. Es sabido que el área de un círculo se expresa por: $Q = \pi R^2$. Si el radio R toma diversos valores numéricos, el área Q tomará también valores diferentes. Como vemos, la variación de una magnitud causa la variación de la otra. En el ejemplo citado, el área Q es función del radio R . Establezcamos el concepto «función».

Definición 1. Si a cada valor de la variable x , perteneciente a cierto campo, le corresponde un sólo valor determinado de otra variable y , entonces ésta será función de x , y podemos escribir simbólicamente:

$$y = f(x), y = \varphi(x), \text{ etc.}$$

La variable x se denomina *variable independiente* o *argumento*. La dependencia que existe entre las variables x e y se llama *funcional*. La letra « f » que entra en la notación simbólica de una dependencia funcional $y = f(x)$ significa que han de realizarse ciertas operaciones con el valor x para obtener el de y . En lugar de $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$, etc., a veces se emplea $y = y(x)$, $u = u(x)$, etc., es decir, las letras y , u , etc., representan tanto variable dependiente, como símbolo del conjunto de operaciones que habrán de realizarse con x .

La notación $y = C$, donde C es una constante, significa una función, cuyo valor es constante e igual a C , cualesquiera que sean los valores de x .

Definición 2. El conjunto de los valores de x para los cuales se determinan los valores de la función y , en virtud de la ley $f(x)$, se llama *dominio de definición de la función*.

Ejemplo 1. La función $y = \sin x$ está definida para todos los valores de x . Por lo tanto, su dominio de definición será el intervalo infinito:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Observación 1. Si existe una dependencia funcional entre dos variables x e $y = f(x)$ y si éstas se consideran como variables orde-

nadas, de los dos valores de la función $y^* = f(x^*)$ e $y^{**} = f(x^{**})$, correspondientes a dos valores del argumento x^* y x^{**} , será posterior el valor de la función que corresponda al valor posterior del argumento. De aquí se deduce la siguiente definición.

Definición 3. La función $y = f(x)$ se llama *creciente*, cuando a un mayor valor del argumento x corresponde un mayor valor de la función. De modo análogo se define la función *decreciente*.

Ejemplo 2. La función $Q = \pi R^2$ es creciente cuando $0 < R < +\infty$, puesto que a un valor mayor de R le corresponde un valor mayor de Q .

Observación 2. A veces en la definición del concepto «función» se admite que a cada valor de x , perteneciente a un determinado campo, le corresponde no un sólo valor de y , sino varios valores, e, incluso un número infinito de valores. En este caso la función se denomina *multiforme*, a diferencia de la función definida anteriormente, y que lleva el nombre de función *uniforme*. En lo sucesivo tendremos en cuenta sólo las funciones uniformes. Si nos encontramos con una función multiforme haremos una indicación especial.

§ 7. FORMAS DE EXPRESION DE FUNCIONES

I. Forma tabular

En este caso la anotación de los valores del argumento se efectúa en cierto orden: $x_1, x_2, \dots, x_n$. De la misma manera se escriben los valores correspondientes de la función $y_1, y_2, \dots, y_n$.

x	x_1	x_2	$\dots \dots \dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots \dots \dots$	y_n

De este tipo son las tablas de las funciones trigonométricas, las de logaritmos, etc.

Las tablas que señalan la dependencia funcional que existe entre magnitudes medidas pueden aparecer también, como resultado del estudio experimental de fenómenos. Por ejemplo, en una estación meteorológica, midiendo en un día determinado la temperatura del aire, se obtiene la siguiente tabla:

Valor de la temperatura T (en grados) en función del tiempo t (en horas)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	-1	-2	-2	-0,5	1	3	3,5	4

Esta tabla determina T como función de t .

II. Forma gráfica

Dado en el plano del sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas un conjunto de los puntos $M(x, y)$ tal que ningún par de puntos se halla sobre una recta paralela al eje Oy , podemos decir

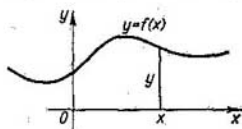


Fig. 4.

que el conjunto mencionado determina una función uniforme $y = f(x)$. Las abscisas de los puntos constituyen los valores del argumento y las ordenadas correspondientes, los de la función (fig. 4).

El conjunto de puntos del plano (xOy), cuyas abscisas representan valores de la variable independiente y las ordenadas, los valores correspondientes de la función, se llama *gráfica* de la función dada.

III. Forma analítica

Primero expliquemos el concepto de «expresión analítica». Se da el nombre de *expresión analítica* a la representación simbólica de un conjunto de ciertas operaciones matemáticas que se realizan en una sucesión determinada con cifras y letras que designan magnitudes constantes y variables. Se entiende por conjunto de operaciones matemáticas no sólo las operaciones elementales (adición, sustracción, extracción de raíz, etc.), sino también las que iremos determinando a medida que avancemos en el curso.

Ejemplos de expresión analítica son:

$$x^4 - 2; \quad \frac{\log x - \sin x}{5x^2 + 1}; \quad 2^x - \sqrt{5 + 3x}, \text{ etc.}$$

Si la dependencia funcional $y = f(x)$ es tal que f designa una expresión analítica, se dice que la función y de x está *expresada analíticamente*. Ejemplos de funciones expresadas analíticamente son:

- 1) $y = x^4 - 2$; 2) $y = \frac{x+1}{x-1}$; 3) $y = \sqrt{1-x^2}$; 4) $y = \sin x$;
5) $Q = \pi R^2$, etc.

Aquí, las funciones están expresadas analíticamente por medio de una fórmula (se entiende por fórmula la igualdad de dos expresiones analíticas). En estos casos podemos hablar de dominio natural de definición de la función.

El dominio natural de definición de una función expresada analíticamente se compone del conjunto de valores de x para los cuales la expresión analítica, o segundo miembro de la igualdad, adquiere un valor determinado. Así, por ejemplo, como dominio natural de definición de la función $y = x^4 - 2$ tendremos el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, ya que la función está definida para todos los valores de x . La función $y = \frac{x+1}{x-1}$ está definida para todos los valores de x , menos para $x = 1$, pues, este valor reduce el denominador a cero. Para la función $y = \sqrt{1-x^2}$, el dominio natural de definición está constituido por el segmento $-1 \leq x \leq 1$, etc.

Observación. A veces surge la necesidad de examinar no todo el dominio natural de definición de la función, sino parte de él. Así, la dependencia del área Q de un círculo de radio R se determina por la función $Q = \pi R^2$. Al considerar esta fórmula geométrica aparece en calidad de dominio de definición el intervalo infinito $0 < R < +\infty$, mientras que el dominio natural de definición de la función dada es el intervalo infinito $-\infty < R < +\infty$.

Si la función $y = f(x)$ viene expresada analíticamente, puede representarse de manera gráfica en el plano de coordenadas xOy . Así, por ejemplo, la gráfica de la función $y = x^2$ es la parábola representada en la figura 5.

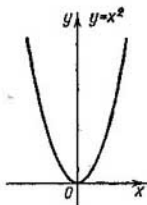


Fig. 5.

§ 8. FUNCIONES ELEMENTALES FUNDAMENTALES. FUNCIONES ELEMENTALES

Las funciones elementales fundamentales expresadas analíticamente son las siguientes:

1. *Función potencial*: $y = x^\alpha$, donde α es un número real *

*) Siendo α un número irracional, esta función se calcula, tomando logaritmos y antilogaritmos: $\log y = \alpha \log x$, suponiendo $x > 0$.

II. *Función exponencial:* $y = a^x$, en la que a es un número positivo, diferente de la unidad.

III. *Función logarítmica:* $y = \log_a x$ en la cual la base a es un número positivo diferente de la unidad.

IV. *Funciones trigonométricas:*

$$y = \operatorname{sen} x, y = \operatorname{cos} x, y = \operatorname{tg} x.$$

$$y = \operatorname{cotg} x, y = \operatorname{sec} x, y = \operatorname{cosec} x.$$

V. *Funciones trigonométricas inversas:*

$$y = \operatorname{arcsen} x, y = \operatorname{arccos} x, y = \operatorname{arctg} x,$$

$$y = \operatorname{arccotg} x, y = \operatorname{arcsec} x, y = \operatorname{arccosec} x.$$

Examinemos los dominios de definición y las gráficas de las funciones elementales fundamentales.

Función potencial. $y = x^\alpha$.

1. α es un número entero positivo. La función está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$. En este caso, para ciertos

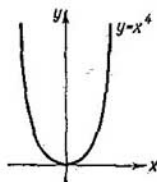


Fig. 6.

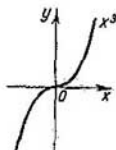


Fig. 7.

valores de α las gráficas de la función toman las formas que se exponen en las figuras 6 y 7.

2. α es un número entero negativo. En este caso, la función está definida para todos los valores de x , excepto para $x = 0$. Las gráficas de la función para ciertos valores de α se exponen en las figuras 8 y 9.

En las figuras 10, 11, 12 tenemos las gráficas de la función potencial cuyos valores de α son números racionales fraccionarios.

Función exponencial, $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Esta función está definida para todos los valores de x . Su gráfica está representada en las figuras 13 y 14.

Función logarítmica, $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

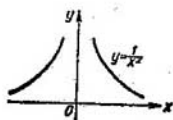


Fig. 8.

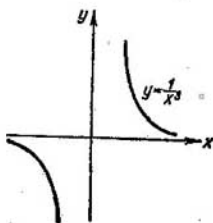


Fig. 9.

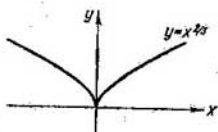


Fig. 10.

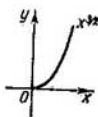


Fig. 11

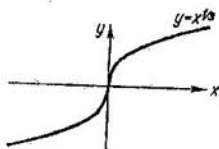


Fig. 12.

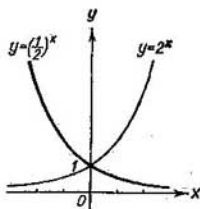


Fig. 13.

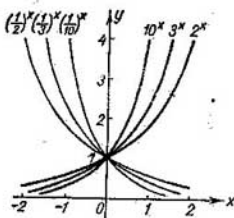


Fig. 14.

Esta función está definida para los valores de $x > 0$. Su gráfica se muestra en la figura 15.

Funciones trigonométricas. En las fórmulas $y = \text{sen } x$, etc., la variable independiente x se expresa en radianes. Todas las funciones trigonométricas indicadas son periódicas. Su definición general es como sigue:

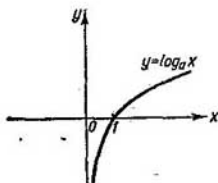


Fig. 15.

Definición 1. La función $y = f(x)$ se denomina *periódica*, si existe un número constante C tal que, al sumarlo (o restarlo) al argumento x , el valor de la función no se altere, $f(x + C) = f(x)$. El valor mínimo de este número constante se denomina *período* de la función; en lo sucesivo lo designaremos por $2l$. Según la definición, la función $y = \text{sen } x$ es periódica, cuyo período es igual a 2π : $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi)$. El

período de $\cos x$ es también igual a 2π . Del mismo modo, el período de las funciones $y = \text{tg } x$ e $y = \text{cotg } x$ es igual a π .

Las funciones $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ están definidas para todos los valores de x . Las funciones $y = \text{tg } x$ e $y = \sec x$ están definidas

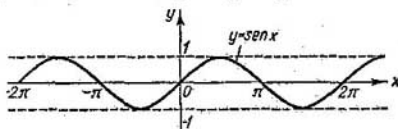


Fig. 16.

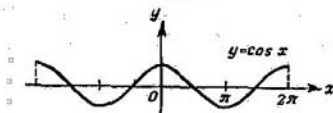


Fig. 17.

en todos los puntos, excepto $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2 \dots$);

las funciones $y = \text{cotg } x$ e $y = \text{cosec } x$ están definidas para todos los valores de x , excepto para $x = k\pi$ ($k = 0, 1, 2 \dots$).

Las gráficas de las funciones trigonométricas se muestran en las figuras 15-19. Más adelante examinaremos detalladamente las funciones trigonométricas inversas.

Introduzcamos ahora el concepto de función de función. Si y es una función de u y u depende, a su vez, de una variable x , entonces, y también depende de x .

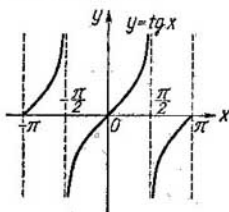


Fig. 18.

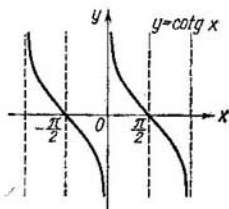


Fig. 19.

Si $y = F(u)$ y $u = \varphi(x)$, la función y de x será:

$$y = F[\varphi(x)].$$

Esta función se denomina *función de función* o *función compuesta*.

Ejemplo 1. Sea $y = \sin u$, $u = x^2$. La función $y = \sin(x^2)$ es una función compuesta de x .

Observación. El dominio de definición de la función $y = F[\varphi(x)]$ está constituido por todo el dominio de la función $u = \varphi(x)$, o bien por la parte de éste en que se definen los valores de u que no salgan fuera del dominio de la función $F(u)$.

Ejemplo 2. El dominio de la función $y = \sqrt{1-x^2}$ ($y = \sqrt{u}$, $u = 1-x^2$) es el segmento $[-1, 1]$, ya que $u < 0$ y $|x| > 1$ y, por lo tanto, la función $\sqrt{u}$ no está definida para estos valores de x (aunque la función $u = 1-x^2$ está definida para todos los valores de x). La gráfica de esta función se representa como la mitad superior de la circunferencia cuyo centro coincide con el origen de coordenadas, siendo el radio de la misma igual a la unidad.

La operación «función de función» puede efectuarse no sólo una vez, sino cualquier número de veces. Por ejemplo, la función $y = \ln[\sin(x^2 + 1)]$ se obtiene, efectuando las siguientes operaciones (es decir, determinando las siguientes funciones):

$$v = x^2 + 1, u = \sin v, y = \ln u.$$

Definamos ahora el concepto de función elemental.

Definición 2. La función que puede ser dada por la fórmula de la forma $y = f(x)$, donde el segundo miembro de la igualdad está compuesto de funciones elementales fundamentales y constantes, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción,

multiplicación, división y función de función, se llama *función elemental*.

De esta definición se deduce que las funciones expresadas analíticamente son funciones elementales.

Ejemplos de las funciones elementales son:

$$y = \sqrt{1 + 4 \sin^2 x}; \quad y = \frac{\log x + 4 \sqrt[3]{x} + 2 \operatorname{tg} x}{10^x - x + 10}.$$

Ejemplo de función no elemental:

$y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ [$y = f(n)$] es una función no elemental, dado que el número de operaciones que deben efectuarse para calcular y va aumentando a medida que crece n , es decir, el número de operaciones es infinito.

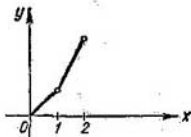


Fig. 20.

Observación. La función expuesta en la figura 20 es elemental aunque viene expresada por dos fórmulas:

$$f(x) = x, \text{ si } 0 \leq x \leq 1; \quad f(x) = 2x - 1, \text{ si } 1 \leq x \leq 2.$$

Es posible demostrar que esta función puede expresarse con una sola fórmula $y = f(x)$, incluida entre las indicadas en la definición 2. (Véanse los ejemplos 139 al 144 de los ejercicios para el capítulo V).

§ 9. FUNCIONES ALGEBRAICAS

Son funciones algebraicas las funciones elementales siguientes:

I. Función racional entera o polinomio

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son números constantes que llamamos coeficientes; n es un entero no negativo, llamado grado del polinomio. Evidentemente, la función indicada está definida para todos los valores de x , es decir, en un intervalo infinito.

Ejemplos: 1. $y = ax + b$ es una función lineal. Si $b = 0$, la función lineal $y = ax$ expresa la dependencia proporcional de y respecto a x . Si $a = 0$, $y = b$, la función es constante.

2. $y = ax^2 + bx + c$, es una función cuadrática.

La gráfica de la función cuadrática es una parábola (fig. 21).

Estas funciones han sido estudiadas detalladamente en el curso de geometría analítica.

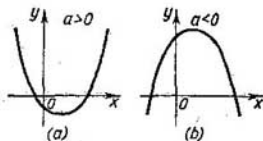


Fig. 21

II. Función racional fraccionaria. Esta función se expresa como la razón de dos polinomios:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

Como ejemplo de una función racional fraccionaria puede servir

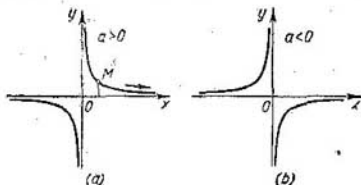


Fig. 22

la función $y = \frac{a}{x}$, que expresa una dependencia inversamente proporcional. Su gráfica se muestra en la figura 22. Es evidente que la función racional fraccionaria está definida para todos los valores de x , excepto para aquellos que reducen el denominador a cero.

III. Función irracional. Si en el segundo miembro de la igualdad $y = f(x)$ se efectúan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y elevación a potencia, siendo los exponentes números racionales, no enteros, la función de y en dependencia de x se llama *irracional*. Son *irracional*es las funciones siguientes:

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^2}}; \quad y = \sqrt{x}, \text{ etc.}$$

Observación 1. No todas las funciones algebraicas están comprendidas en tres tipos de funciones mencionadas. Se denomina *función algebraica* cualquier función $y = f(x)$ que satisfaga una ecuación de la forma

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_n(x) = 0, \quad (1)$$

donde, $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ son ciertos polinomios de x .

Se puede demostrar que cada una de las funciones que pertenece a los tres tipos mencionados satisface cierta ecuación de la forma (1); pero no toda función que satisfaga esta ecuación pertenecerá a alguno de los tres tipos denominados.

Observación 2. La función que no es algebraica se llama *transcendente*. Son funciones transcendentales:

$$y = \cos x; \quad y = 10^x, \text{ etc.}$$

§ 10. SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

La posición de un punto en el plano se puede determinar por medio del sistema de *coordenadas polares*.

Elijamos en el plano un punto O , que llamaremos *polo* y una recta o *eje polar*, que tiene su origen en el punto O . La posición de

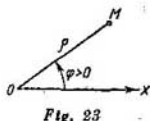


Fig. 23

un punto M en el plano se determina por dos números: ρ y φ . El primero indica la distancia del punto M al polo y el segundo, el valor del ángulo formado por el segmento OM con el eje polar. Para calcular el ángulo φ se considera positiva la dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Los números ρ y φ se denominan *coordenadas polares* del punto M (fig. 23).

El radio vector ρ se considera siempre no negativo. Si el ángulo polar φ varía en los límites $0 \leq \varphi < 2\pi$, a cada punto del plano, a excepción del polo, le corresponde un par determinado de números ρ y φ . En el polo, $\rho = 0$ y φ puede tener cualquier valor.

Determinemos la relación que existe entre las coordenadas polares y las rectangulares o cartesianas. Supongamos que el origen de coordenadas rectangulares coincide con el polo y la dirección positiva del eje Ox , con el eje polar. Veamos ahora la relación que existe entre las coordenadas cartesianas y las polares de un mismo punto.

En la figura 24 se ve:

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ e inversamente $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

Observación. Determinando φ hay que tener en cuenta el cuadrante en que se halla el punto y tomar el valor correspondiente de φ .

En el sistema de coordenadas polares la ecuación $\rho = F(\varphi)$ determina una línea.

Ejemplo 1. En coordenadas polares la ecuación $\rho = a$, donde $a = \text{const}$, determina una circunferencia de radio a y centro en el polo. La ecuación

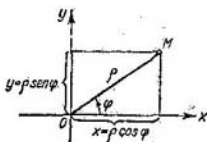


Fig. 24

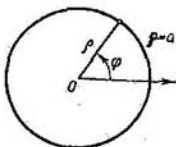


Fig. 25

de la misma circunferencia (fig. 25) en el sistema de coordenadas rectangulares, trazado en la forma expuesta en la figura 24, será:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \text{ ó } x^2 + y^2 = a^2.$$

Ejemplo 2.

$$\rho = a\varphi, \text{ donde } a = \text{const.}$$

Veamos la tabla de valores de ρ para algunos valores de φ :

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0,78a$	$\approx 1,57a$	$\approx 2,36a$	$\approx 3,14a$	$\approx 4,71a$	$\approx 6,28a$	$\approx 9,42a$	$\approx 12,56a$

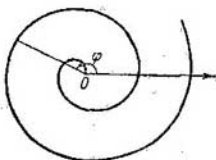


Fig. 26

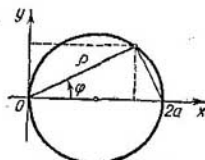


Fig. 27

La curva correspondiente se muestra en la figura 26 y se llama espiral de Arquímedes.

Ejemplo 3.

$$\rho = 2a \cos \varphi.$$

Esta es la ecuación de una circunferencia de radio a y centro en el punto $p_0 = a$ y $\varphi = 0$, (fig. 27). Escribamos la ecuación de esta circunferencia en coordenadas rectangulares. Poniendo en esta ecuación $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, obtendremos: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, o sea, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Ejercicios para el capítulo I

1. Dada la función $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Comprobar que $f(1) = 3$, $f(3) = 23$.

2. $f(x) = x^2 + 1$. Calcular los valores:

a) $f(1)$. Respuesta: 17. b) $f(\sqrt{2})$. Respuesta: 3. c) $f(a+1)$. Respuesta: $a^2 + 2a + 2$. d) $f(a) + 1$. Respuesta: $a^2 + 2$. e) $f(a^2)$. Respuesta: $a^4 + 1$. f) $[f(a)]^2$. Respuesta: $a^4 + 2a^2 + 1$. g) $f(2a)$. Respuesta: $4a^2 + 1$.

3. $\varphi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$. Escribir las expresiones: $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\frac{1}{\varphi(x)}$. Respuesta: $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{3+5x}$; $\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{3x+5}{1-x}$.

4. $\psi(x) = \sqrt{x^2 + 4}$. Escribanse las expresiones $\psi(2x)$ y $\psi(0)$. Respuesta: $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$; $\psi(0) = 2$.

5. $f(\theta) = \lg \theta$. Comprobar la igualdad $f(2\theta) = \frac{2f(\theta)}{1 - [f(\theta)]^2}$.

6. $\varphi(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$. Comprobar la igualdad $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

7. $f(x) = \log x$; $\varphi(x) = x^3$. Escribir las expresiones: a) $f[\varphi(2)]$. Respuesta: $3 \log 2$. b) $f\{\varphi(a)\}$. Respuesta: $3 \log a$. c) $\varphi[f(a)]$. Respuesta: $[\log a]^3$.

8. Hallar el dominio natural de definición de la función $y = 2x^2 + 1$. Respuesta: $-\infty < x < +\infty$.

9. Hallar los dominios naturales de definición de las funciones:

a) $\sqrt{1-x^2}$. Respuesta: $-1 \leq x \leq +1$. b) $\sqrt[3]{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$. Respuesta: $-3 \leq x \leq 7$. c) $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[4]{x-b}$. Respuesta: $-\infty < x < +\infty$. d) $\frac{a+x}{a-x}$. Respuesta: $x \neq a$. e) $\arcsen^2 x$. Respuesta: $-1 \leq x \leq +1$. f) $y = \log x$. Respuesta: $x > 0$. g) $y = a^x$ ($a > 0$). Respuesta: $-\infty < x < +\infty$.

Construir las gráficas de las funciones:

10. $y = -3x + 5$. 11. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. 12. $y = 3 - 2x^2$. 13. $y = x^2 + 2x - 1$.

14. $y = \frac{1}{x-1}$. 15. $y = \sin 2x$. 16. $y = \cos 3x$. 17. $y = x^2 - 4x + 6$. 18. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

19. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. 20. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. 21. $y = \lg \frac{1}{2}x$. 22. $y = \cotg \frac{1}{4}x$.

23. $y = 3^x$. 24. $y = 2^{-x^2}$. 25. $y = \log_2 \frac{1}{x}$. 26. $y = x^3 + 1$. 27. $y = 4 - x^3$.

28. $y = \frac{1}{x^2}$. 29. $y = x^4$. 30. $y = x^5$. 31. $y = x^{\frac{1}{2}}$. 32. $y = x^{-\frac{1}{2}}$. 33. $y = x^{\frac{1}{3}}$.
34. $y = |x|$. 35. $y = \log_2 |x|$. 36. $y = \log_2 (1-x)$. 37. $y = 3 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$.
38. $y = 4 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$.

39. La función $f(x)$ está definida en el segmento $[-1; 1]$ del modo siguiente:

$$f(x) = 1 + x \quad \text{para} \quad -1 \leq x \leq 0;$$

$$f(x) = 1 - 2x \quad \text{para} \quad 0 \leq x < 1.$$

40. La función $f(x)$ está definida en el segmento $[0; 2]$ del modo siguiente:

$$f(x) = x^2 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$f(x) = x \quad \text{para} \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Construir las curvas dadas por ecuaciones polares:

41. $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (espiral hiperbólica). 42. $\rho = a^\varphi$ (espiral logarítmica). 43. $\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$ (lemniscata). 44. $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ (cardioide). 45. $\rho = a \sin 3\varphi$.

LIMITE. CONTINUIDAD DE LA FUNCION

§ 1. LIMITE DE LA MAGNITUD VARIABLE. VARIABLE INFINITAMENTE GRANDE

En este párrafo trataremos de las magnitudes ordenadas que varían de un modo especial, determinado por la expresión «la variable tiende a un límite». A continuación el concepto de límite de la variable desempeñará un papel fundamental ya que con él están relacionados los conceptos fundamentales del análisis matemático: derivada, integral, etc.

Definición 1. El número constante a se denomina *límite* de la variable x , si para cualquier número infinitesimal positivo e prefijado, se puede indicar tal valor de la variable x , a partir del cual todos los valores posteriores de la misma satisfacen la desigualdad

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Si el número a es el límite de la variable x , se dice que x tiende al límite a ; su notación es:

$$x \rightarrow a \text{ ó } \lim x = a.$$

En términos geométricos la definición de límite puede enunciarse así: el número constante a es el *límite* de la variable x , si para cualquier vecindad infinitesimal prefijada de radio ε y centro en el punto a , existe un valor de x tal que todos los puntos correspondientes a los valores posteriores de la variable se encuentren dentro de la misma vecindad (fig. 28). Examinemos algunos ejemplos de variables que tienden al límite.

Ejemplo 1. La variable x toma sucesivamente los valores $x_1 = 1 + \frac{1}{2}$; $x_2 = 1 + \frac{1}{3}$; $x_3 = 1 + \frac{1}{4}$; ...; $x_n = 1 + \frac{1}{n}$; ...

Comprobemos que esta variable tiene por límite la unidad. Tenemos:

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{n}.$$

Para cualquier ε y todos los valores posteriores de la variable, a partir de n , donde $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ó $n > \frac{1}{\varepsilon}$, satisfacen la desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon$, que es lo que se trataba de demostrar.

Observemos que, en este caso, la variable tiende al límite decreciendo al mismo tiempo.

Ejemplo 2. La variable x toma sucesivamente los valores

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}; \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2^2}; \quad x_3 = 1 - \frac{1}{2^3};$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2^4}; \quad \dots; \quad x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}; \quad \dots$$

El límite de esta variable es la unidad. En efecto,

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{2^n}$$

Para cualquier ε , a partir de n , que satisface la correlación $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, y de la cual se deduce que

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \log 2 > \log \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ó} \quad n > \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2},$$

todos los valores posteriores de x satisfarán la correlación

$$|x_n - 1| < \varepsilon.$$

En el caso considerado, la variable tiende al límite oscilando alrededor de él, es decir, tomando valores unas veces mayores y otras, menores que éste.



Fig. 28

Observación 1. En el capítulo 1, § 3, se ha indicado que la magnitud constante c se considera frecuentemente como una variable cuyos valores son siempre iguales: $x = c$.

Es evidente que el límite de la constante será igual a la misma constante, dado que siempre se cumple la desigualdad $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, independientemente del valor que tenga ε .

Observación 2. De la definición de límite se deduce que una magnitud variable no puede tener dos límites. En efecto, si $\lim x = a$ y $\lim x = b$ ($a < b$), entonces x debe satisfacer las dos desigualdades simultáneamente: $|x - a| < \varepsilon$ y $|x - b| < \varepsilon$ siendo ε arbitrariamente pequeño, pero esto es imposible, si $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ (fig. 29).

Observación 3. No toda variable tiene límite. Supongamos que la variable x toma sucesivamente los siguientes valores:

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = 1 - \frac{1}{4}; \quad x_3 = \frac{1}{8}; \quad \dots; \quad x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}};$$

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}$$

(fig. 30). Siendo k lo suficientemente grande, el valor x_{2k} y todos los valores posteriores, de subíndices pares, se diferenciarán de la unidad en una cantidad tan pequeña como se quiera, mientras que

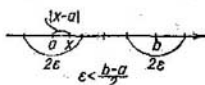


Fig. 29



Fig. 30

el valor siguiente x_{2k+1} y todos los valores posteriores de x , de subíndices impares, irán diferenciándose de cero en una cantidad tan pequeña como se desee. Por tanto, la variable x no tiende al límite.

En la definición de límite se indica que si una variable tiende al límite a , éste debe ser un número constante. Pero el concepto «tiende» se usa también para caracterizar otro tipo de variación de la variable, como veremos en la definición que sigue.

Definición 2. La variable x tiende al infinito, si para cualquier número positivo M prefijado se puede elegir un valor de x tal que, a partir de él todos los valores posteriores de la variable satisfagan la desigualdad $|x| > M$.

La variable x que tiende al infinito, se denomina *infinitamente grande* y esta tendencia se expresa así: $x \rightarrow \infty$.

Ejemplo 3. La variable x que toma los valores:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -3; \quad \dots; \quad x_n = (-1)^n n; \quad \dots$$

es infinitamente grande, ya que para cualquier valor de $M > 0$ todos los valores de la variable, a partir de uno de ellos, son mayores en valor absoluto que M .

La variable x «tiende al infinito con signo «más», $x \rightarrow +\infty$, si M es un número positivo cualquiera de tal manera que, a partir de cierto valor, todos los valores posteriores de la variable satisfagan la desigualdad $M < x$.

Como ejemplo de una variable que tiende al infinito con signo «más» puede servir la variable x que toma los valores $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

La variable x tiende al infinito con signo «menos» $x \rightarrow -\infty$, si M es un número positivo cualquiera de tal manera que todos los valores sucesivos de la variable, a partir de alguno de ellos, satisfagan la desigualdad $x < -M$.

Por ejemplo, la variable x , que toma los valores $x_1 = -1$, $x_2 = -2, \dots$, $x_n = -n, \dots$, tiende a $-\infty$.

§ 2. LIMITE DE LA FUNCION

Examinemos algunos casos de variación de una función cuando el argumento x tiende a un límite a o al infinito.

Definición 1. Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida en determinada vecindad del punto a o en ciertos puntos de la misma.

La función $y = f(x)$ tiende al límite b ($y \rightarrow b$) cuando x tienda a a ($x \rightarrow a$), si para cada número positivo ε , por pequeño que éste sea, es posible indicar un número positivo δ tal que para todos los valores de x , diferentes de a , que satisfacen la desigualdad* $|x - a| < \delta$, se verificará la desigualdad:

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Si b es el límite de la función $f(x)$, cuando $x \rightarrow a$, su notación es:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$$

o bien $f(x) \rightarrow b$, cuando $x \rightarrow a$.

Si $f(x) \rightarrow b$, cuando $x \rightarrow a$, entonces en la gráfica de la función $y = f(x)$ esto se interpreta así (fig. 31): puesto que de la desigualdad

$|x - a| < \delta$ se deduce $|f(x) - b| < \varepsilon$, entonces, todos los puntos M en la gráfica de la función $y = f(x)$, correspondientes a los puntos x que se encuentran a una distancia no mayor que δ del punto a , se localizarán dentro de una banda de ancho 2ε , limitada por las rectas $y = b - \varepsilon$ e $y = b + \varepsilon$.

Observación 1. El límite de la función $f(x)$, cuando $x \rightarrow a$, se puede definir también del modo siguiente.

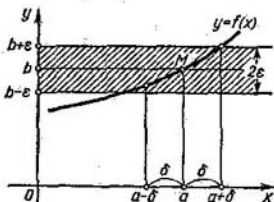


Fig. 31

* Aquí se tienen en consideración aquellos valores de x que, satisfaciendo la desigualdad $|x - a| < \delta$, pertenecen al dominio de definición de la función. En adelante, consideraciones de este tipo las encontraremos con frecuencia. Así, al examinar la variación de una función, cuando $x \rightarrow \infty$, puede ocurrir que la función esté definida sólo para valores enteros y positivos de x . Por consiguiente, en este caso x tiende al infinito, tomando sólo valores enteros positivos. En lo sucesivo prescindiremos de explicaciones de este tipo.

Supongamos que la variable x está ordenada de tal manera que si

$$|x^* - a| > |x^{**} - a|,$$

entonces, x^{**} es valor posterior, y x^* , el anterior. Pero si

$$|\bar{x}^* - a| = |\bar{x}^{**} - a| \text{ y } \bar{x}^* < \bar{x}^{**},$$

entonces $\bar{x}^{**}$ será el valor posterior y $\bar{x}^*$, el anterior.

En otras palabras, de los dos puntos en el eje numérico, será posterior el que esté más cerca del punto a ; si son equidistantes será posterior el que se encuentre a la derecha del punto a .

Supongamos que la variable x , ordenada del modo indicado, tiende al límite a [$x \rightarrow a$ ó $\lim x = a$].

Examinemos ahora la variable $y = f(x)$. En este caso y en lo sucesivo consideraremos que de dos valores de la función, posterior será el que corresponda al valor posterior del argumento.

Si la variable y definida del modo indicado, tiende a un límite b , cuando x tiende a a , escribiremos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

En este caso diremos que la función $y = f(x)$ tiende al límite b , cuando $x \rightarrow a$.

Es fácil demostrar que las dos definiciones de límite de la función son equivalentes.

Observación 2. Si $f(x)$ tiende al límite b_1 , cuando x tiende a cierto número a de modo que x toma sólo valores inferiores a éste, su notación es $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$, siendo

b_1 el límite de la función $f(x)$ en el punto a «por la izquierda». En caso de que x tome sólo valores mayores que a , la notación será $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$, siendo

b_2 el límite de la función en el punto a «por la derecha» (fig. 32).

Se puede demostrar que, si los límites «por la izquierda» y «por la derecha» existen y son iguales, es decir, si $b_1 = b_2 = b$, entonces b será el límite de esta función en el punto a en

el sentido que acabamos de exponer. Y recíprocamente, si existe el límite b de la función en el punto a , existen también límites de la función en el punto a «por la derecha» y «por la izquierda» que son iguales.

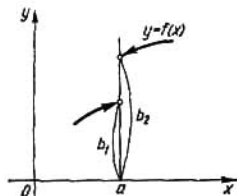


Fig. 32

Ejemplo 1. Demostremos que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$. En efecto, supongamos que está dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$; para que se cumpla la desigualdad

$$|(3x + 1) - 7| < \varepsilon,$$

es necesario que sean cumplidas las desigualdades siguientes:

$$|3x - 6| < \varepsilon, \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad -\frac{\varepsilon}{3} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De este modo, cualquiera que sea ε , para todos los valores de x que satisfagan la desigualdad $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$. El valor de la función $3x + 1$ se diferenciará de 7 en una magnitud menor que ε . Esto significa que 7 es el límite de la función cuando $x \rightarrow 2$.

Observación 3. Para que exista el límite de la función, cuando $x \rightarrow a$, no es necesario que la función esté definida en el punto $x = a$. Cuando se busca el límite, se examinan los valores de la función, diferentes de a , en la vecindad del punto a . Examinemos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2. Demostremos que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Aquí la función $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ no está definida en el punto $x = 2$.

Es necesario demostrar que, siendo ε un número cualquiera arbitrario, se encontrará tal δ que se cumpla la desigualdad

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon, \quad (1)$$

a condición de que $|x - 2| < \delta$. Pero cuando $x \neq 2$, la desigualdad (1) es equivalente a:

$$\left| \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} - 4 \right| = |x + 2 - 4| < \varepsilon.$$

$$6 \quad |x - 2| < \varepsilon. \quad (2)$$

Así pues, siendo ε arbitrario, la desigualdad (1) se verificará, si se cumple la desigualdad (2) (aquí, $\delta = \varepsilon$).

Esto significa que la función dada tiene por límite el número 4, cuando $x \rightarrow 2$.

Examinemos algunos casos de variación de la función, cuando $x \rightarrow \infty$.

Definición 2. La función $f(x)$ tiende al límite b cuando $x \rightarrow \infty$, si para cualquier número positivo ε arbitrariamente pequeño existe un número positivo N tal que para todos los valores de x que satisfacen la desigualdad $|x| > N$, se cumpla la desigualdad

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Ejemplo 3. Demostremos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x} \right) = 1, \text{ o bien } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Para ello es necesario demostrar que siendo ε un número arbitrario se cumplirá la desigualdad

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right| < \varepsilon, \quad (3)$$

siempre que $|x| > N$, dependiendo N de la elección de ε .

La desigualdad (3) es equivalente a otra: $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$, que se cumplirá a condición de que

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} = N.$$

Esto significa que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$ (fig. 33).

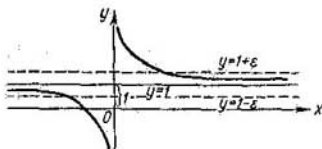


Fig. 33

Conociendo el sentido de los símbolos $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$, es evidente el significado de las expresiones:

« $f(x)$ tiende a b cuando $x \rightarrow +\infty$ » y

« $f(x)$ tiende a b cuando $x \rightarrow -\infty$ »,

las cuales simbólicamente se escriben así:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

§ 3. FUNCIÓN QUE TIENDE AL INFINITO. FUNCIONES ACOTADAS

Hemos examinado los casos en los que la función $f(x)$ tiende a cierto límite b , cuando $x \rightarrow a$ ó $x \rightarrow \infty$.

Examinemos ahora el caso cuando la función $y = f(x)$ tiende al infinito, para una determinada forma de variación del argumento.

Definición 1. La función $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \rightarrow a$, es decir, es una magnitud *infinitamente grande* cuando $x \rightarrow a$, si para cualquier número positivo M , por grande que sea, existe un valor $\delta > 0$ tal que para todos los valores de x diferentes de a y que satisfacen la condición $|x - a| < \delta$, se cumpla la desigualdad $|f(x)| > M$.

Si $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \rightarrow a$, se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

ó $f(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow a$.

Si $f(x)$ tiende al infinito, cuando $x \rightarrow a$, tomando sólo valores positivos, o bien sólo negativos, se escribe, respectivamente:
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ó $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Ejemplo 1. Demostremos que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

En efecto, para cualquier $M > 0$ tenemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M,$$

siempre que:

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M}, \quad |1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta.$$

La función $\frac{1}{(1-x)^2}$ toma sólo valores positivos (fig. 34).

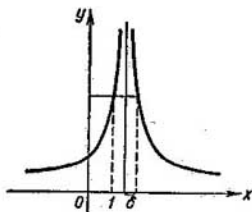


Fig. 34

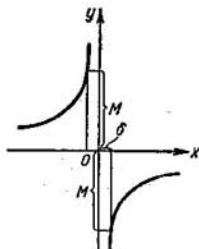


Fig. 35

Ejemplo 2. Demostremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$. En efecto, para cualquier $M > 0$ tenemos:

$$\left|-\frac{1}{x}\right| > M,$$

siempre que:

$$|x| = |x-0| < \frac{1}{M} = \delta.$$

Aquí $\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$, para $x < 0$ y $\left(-\frac{1}{x}\right) < 0$, para $x > 0$ (fig. 35).

Si la función $f(x)$ tiende al infinito cuando $x \rightarrow \infty$, se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

y, en particular, puede suceder:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \text{etc.}$$

Observación 1. No es forzoso que la función $y = f(x)$ tienda a un límite finito o al infinito, cuando $x \rightarrow a$ o $x \rightarrow \infty$.

Ejemplo 3. La función $y = \sin x$, definida en el intervalo ilimitado $-\infty < x < +\infty$, cuando $x \rightarrow \infty$, no tiende a un límite finito, ni al infinito (fig. 36).

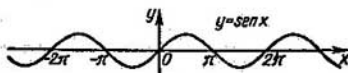


Fig. 36

Ejemplo 4. La función $y = \sin \frac{1}{x}$, definida para todos los valores de x , excepto $x = 0$, no tiende a un límite finito, ni tampoco al infinito, cuando $x \rightarrow 0$. La gráfica de esta función se expone en la fig. 37.

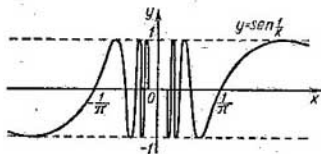


Fig. 37

Definición 2. La función $y = f(x)$ se denomina *acotada* en el dominio dado de variación del argumento x , si existe un número positivo M tal que para todos los valores de x pertenecientes al dominio considerado se cumpla la desigualdad $|f(x)| \leq M$. Si el número M no existe, se dice que la función $f(x)$ no está acotada en el dominio dado.

Ejemplo 5. La función $y = \operatorname{sen} x$, definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, es una función acotada, dado que para todos los valores de x se verifica:

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 = M.$$

Definición 3. La función $f(x)$ se denomina *acotada*, cuando $x \rightarrow a$, si existe una vecindad con centro en el punto a en la cual dicha función está acotada.

Definición 4. La función $y = f(x)$ se denomina *acotada*, cuando $x \rightarrow \infty$, si existe un número $N > 0$ tal que para todos los valores de x que satisfacen la desigualdad $|x| > N$, la función $f(x)$ esté acotada.

El problema del acotamiento de la función que tiende a un límite se resuelve por medio del siguiente teorema.

Teorema 1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, siendo b un número finito, la función $f(x)$ está acotada cuando $x \rightarrow a$.

Demostración. De la igualdad $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará un número δ tal que en la vecindad $a - \delta < x < a + \delta$ se cumpla la desigualdad

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

o sea,

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon.$$

Esto significa que la función $f(x)$ está acotada, cuando $x \rightarrow a$.

Observación 2. De la definición de función acotada $f(x)$ se deduce que si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

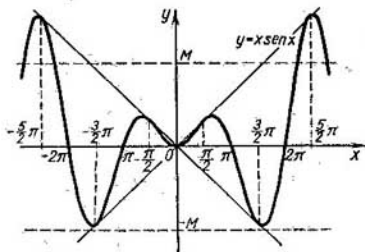


Fig. 38

es decir, si $f(x)$ es infinitamente grande, esta función no está acotada. La notación recíproca no es cierta; es decir, que una función no acotada puede no ser infinitamente grande.

Por ejemplo, la función $y = x \operatorname{sen} x$, cuando $x \rightarrow \infty$ no está acotada, ya que para cualquier $M > 0$ se pueden encontrar valores de x tales que $|x \operatorname{sen} x| > M$. Pero la función $y = x \operatorname{sen} x$ no es infinitamente grande, pues se reduce a cero, cuando $x = 0, \pi, 2\pi \dots$. La gráfica de la función $y = x \operatorname{sen} x$ está expuesta en la fig. 38.

Teorema 2. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - b \neq 0$, la función $y = \frac{1}{f(x)}$ está acotada, cuando $x \rightarrow a$.

Demostración. De la hipótesis del teorema se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario, en cierta vecindad del punto $x = a$ tendremos: $|f(x) - b| < \varepsilon$, ó $||f(x)| - |b|| < \varepsilon$, ó $-\varepsilon < |f(x)| - |b| < \varepsilon$ ó $|b| - \varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$. De las últimas desigualdades se deduce:

$$\frac{1}{|b| - \varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b| + \varepsilon}.$$

Al tomar, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{10} |b|$, tenemos

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|},$$

lo que significa que la función $\frac{1}{f(x)}$ está acotada.

§ 4. INFINITESIMALES Y SUS PRINCIPALES PROPIEDADES

Examinemos en este párrafo las funciones que tienden a cero, para cierto modo de variación del argumento.

Definición. La función $\alpha = \alpha(x)$ se denomina *infinitamente pequeña (infinitesimal)*, cuando $x \rightarrow a$ o cuando $x \rightarrow \infty$, si $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ ó $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

De la definición de límite se deduce que si, por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, esto significa que, para cualquier número positivo ε prefijado y arbitrariamente pequeño, se encontrará $\delta > 0$ tal que para todos los x que satisfacen la condición $|x - a| < \delta$, se verifique la condición $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Ejemplo 1. La función $\alpha = (x-1)^2$ es infinitamente pequeña, cuando $x \rightarrow 1$, dado que $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ (fig. 39).

Ejemplo 2. La función $\alpha = \frac{1}{x}$ es infinitamente pequeña, cuando $x \rightarrow \infty$ (fig. 40) (véase el ejemplo 3 en el § 2).

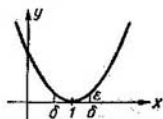


Fig. 39

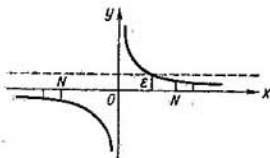


Fig. 40

Tendrá mucha importancia en adelante la correlación siguiente:

Teorema 1. Si la función $y = f(x)$ puede ser representada como suma del número constante b y la magnitud infinitamente pequeña α :

$$y = b + \alpha, \quad (1)$$

se tiene que

$$\lim y = b \text{ (cuando } x \rightarrow a \text{ ó } x \rightarrow \infty \text{)}.$$

Recíprocamente, si $\lim y = b$, se puede escribir $y = b + \alpha$, donde α es una magnitud infinitamente pequeña.

Demostración. De la igualdad (1) se deduce que $|y - b| = |\alpha|$. Pero cuando ϵ es arbitrario todos los valores de α , a partir de uno de ellos, satisfacen la desigualdad $|\alpha| < \epsilon$; entonces, para todos los valores de y , a partir de alguno de ellos, se cumplirá la desigualdad $|y - b| < \epsilon$, lo que significa que $\lim y = b$.

Recíprocamente: si $\lim y = b$, entonces, para ϵ arbitrario para todos los valores de y , a partir de uno de ellos, se verificará la desigualdad $|y - b| < \epsilon$. Pero, si designamos $y - b = \alpha$, entonces, para todos los valores de α , a partir de alguno de ellos, tendremos $|\alpha| < \epsilon$, lo que significa que α es una magnitud infinitamente pequeña.

Ejemplo 3. Dada la función $y = 1 + \frac{1}{x}$ (fig. 41), es evidente que $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$.

Recíprocamente, si $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$, la variable y puede ser representada como suma del límite 1 y la infinitesimal $\alpha = \frac{1}{x}$, es decir, $y = 1 + \alpha$.

Teorema 2. Si $\alpha = \alpha(x)$ tiende a cero, cuando $x \rightarrow a$ (o cuando $x \rightarrow \infty$), sin reducirse a cero, se tendrá que $y = \frac{1}{\alpha}$ tiende al infinito.

Demostración. Por grande que sea $M > 0$, se cumplirá la desigualdad $\frac{1}{|\alpha|} > M$, siempre que se cumpla $|\alpha| < \frac{1}{M}$. La última desigualdad se cumplirá para todos los valores de α , a partir de alguno de ellos, puesto que $\alpha(x) \rightarrow 0$.

Teorema 3. La suma algebraica de dos, tres o un número determinado de infinitesimales es una función infinitamente pequeña.

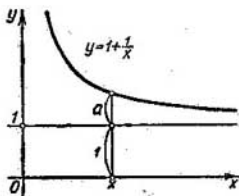


Fig. 41

Demostración. Nos limitaremos a dos sumandos, ya que la demostración es análoga para cualquier número de ellos.

Supongamos que $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, donde $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$. Demostremos que para cualquier $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, se encontrará $\delta > 0$ tal que, al satisfacer la desigualdad $|x - a| < \delta$, se verifique $|u| < \varepsilon$. Puesto que $\alpha(x)$ es una magnitud infinitamente pequeña se encontrará δ tal que en la vecindad de radio δ_1 y centro ubicado en el punto a , se verificará, también, $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Puesto que $\beta(x)$ es una magnitud infinitamente pequeña, en la vecindad del punto a de radio δ_2 tendremos $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomemos δ igual a la menor de las magnitudes δ_1 y δ_2 . Entonces, en la vecindad del punto a de radio δ se cumplirán las desigualdades $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, en esta vecindad tendremos:

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $|u| < \varepsilon$, lo que se trataba de demostrar.

De un modo análogo se demuestra el caso:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = 0.$$

Observación. En lo sucesivo tendremos que examinar las sumas de magnitudes infinitamente pequeñas en las que, al ir disminuyendo cada sumando, vaya creciendo el número de éstos. En este caso el teorema puede no ser válido.

Examinemos, por ejemplo, $u = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x}}_{x \text{ sumandos}}$, donde x

toma sólo valores enteros positivos ($x = 1, 2, 3, \dots, n \dots$). Es evidente que cada sumando, cuando $x \rightarrow \infty$, es una magnitud infinitamente pequeña, sin que lo sea la suma $u = 1$.

Teorema 4. *El producto de una función infinitamente pequeña $\alpha = \alpha(x)$ por una función acotada $z = z(x)$, cuando $x \rightarrow a$ (ó $x \rightarrow \infty$), es una magnitud (función) infinitamente pequeña.*

Demostración. Demostremos el teorema para el caso en que $x \rightarrow a$. Dado un número $M > 0$, se encontrará tal vecindad del punto $x = a$ en la que se verificará la desigualdad $|z| < M$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará una vecindad en la que se cumplirá la desigualdad $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$. En la menor de estas dos vecindades se cumplirá la desigualdad

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Esto quiere decir que αz es una magnitud infinitamente pequeña. Para el caso de $x \rightarrow \infty$, la demostración se efectúa de modo análogo. Del teorema demostrado se deducen dos corolarios.

Corolario 1. Si $\lim \alpha = 0$ y $\lim \beta = 0$, entonces $\lim \alpha\beta = 0$, puesto que $\beta(x)$ es una magnitud acotada. Esto se cumple para cualquier número finito de factores.

Corolario 2. Si $\lim \alpha = 0$ y $c = \text{const}$, entonces $\lim c\alpha = 0$.

Teorema 5. *El cociente $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ de la división de una magnitud infinitamente pequeña $\alpha(x)$ por una función, cuyo límite es diferente de cero, es una magnitud infinitamente pequeña.*

Demostración. Supongamos que $\lim \alpha(x) = 0$ y $\lim z(x) = b \neq 0$. Basándose en el teorema 2, § 3 se deduce que $\frac{1}{z(x)}$ es una

magnitud acotada. Por consiguiente, la fracción $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x) \frac{1}{z(x)}$ es el producto de una magnitud infinitamente pequeña por otra acotada, es decir, una infinitesimal.

§ 5. TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LÍMITES

En este apartado, como en el anterior, vamos a examinar conjuntos de funciones que dependen de un mismo argumento x , cuando $x \rightarrow a$ o cuando $x \rightarrow \infty$.

Por ser análogas las demostraciones para ambos casos nos limitaremos a uno sólo, omitiendo, incluso, las notaciones $x \rightarrow a$ o $x \rightarrow \infty$, que consideraremos sobreentendidas.

Teorema 1. *El límite de la suma algebraica de dos, tres y, en general, de un número finito de variables es igual a la suma algebraica de los límites de estas variables:*

$$\lim (u_1 + u_2 + \dots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \dots + \lim u_k.$$

Demostración. Puesto que la demostración es análoga para cualquier número de sumandos, tomemos sólo dos.

Supongamos que $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Basándonos en el teorema 1 § 4, podemos escribir:

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

donde α_1 y α_2 son magnitudes infinitesimales. Por tanto,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Puesto que $(a_1 + a_2)$ es una magnitud constante y $(\alpha_1 + \alpha_2)$ es una infinitesimal, entonces, de acuerdo con el teorema 1 § 4, resultará que

$$\lim (u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2.$$

Ejemplo 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Teorema 2. *El límite del producto de dos, tres y, en general, de un número finito de variables es igual al producto de los límites de estas variables:*

$$\lim u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \dots \cdot \lim u_k.$$

Demostración. Con el fin de abreviar, realicemos la demostración para dos factores. Supongamos que $\lim u_1 = a_1$ y $\lim u_2 = a_2$. Por tanto,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2.$$

$$u_1 u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1 a_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2.$$

El producto $a_1 a_2$ es una constante. Según los teoremas del § 4, la magnitud $a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_1 a_2$ es infinitamente pequeña. Por consiguiente, $\lim u_1 u_2 = a_1 a_2 = \lim u_1 \cdot \lim u_2$.

Corolario. Un factor constante se puede sacar fuera del signo de límite. En efecto, si $\lim u_1 = a_1$, $c = \text{const}$ y, por tanto, $\lim c = c$, se tiene:

$\lim (cu_1) = \lim c \cdot \lim u_1 = c \lim u_1$, que es lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3 = 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$$

Teorema 3. El límite del cociente de dos variables es igual al cociente de los límites de estas variables, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero:

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \text{ siempre que } \lim v \neq 0.$$

Demostración. Supongamos que $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$. Entonces $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, donde α y β son magnitudes infinitamente pequeñas. Escribamos las identidades

$$\frac{u}{v} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b + \beta)},$$

o sea,

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b + \beta)}.$$

La fracción $\frac{a}{b}$ es un número constante y $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b + \beta)}$ (según los teoremas 4 y 5, § 4) es una variable infinitamente pequeña, puesto que $\alpha b - \beta a$ es también una infinitesimal y el denominador $b(b + \beta)$ tiene por límite $b^2 \neq 0$. Por consiguiente, $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$.

Ejemplo 3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x+5)}{\lim_{x \rightarrow 1} (4x-2)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} x + 5}{4 \lim_{x \rightarrow 1} x - 2} = \frac{3 \cdot 1 + 5}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4.$$

En este ejemplo hemos aprovechado el teorema, ya demostrado, acerca del límite de una fracción, puesto que el límite del denominador, cuando $x \rightarrow 1$, es distinto de cero. Pero, si el límite del denominador es cero, no se puede aplicar el teorema citado. En este último caso hacen falta consideraciones especiales.

Ejemplo 4. Hallar $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Aquí el denominador y el numerador tienden a cero, cuando $x \rightarrow 2$, y, por tanto, el teorema 3 no es válido para el caso. Realicemos la siguiente transformación idéntica:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2.$$

La transformación es válida para todos los valores de x diferentes de 2. Por tanto, teniendo en cuenta la definición de límite, podemos escribir:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Ejemplo 5. Hallar $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1}$. Cuando $x \rightarrow 1$, el denominador tiende

a cero, mientras que el numerador tiende a la unidad. Por consiguiente, el límite de la magnitud inversa es cero, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} x} = \frac{0}{1} = 0.$$

De aquí se deduce, según el teorema 2 del párrafo precedente, que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1} = \infty.$$

Teorema 4. Si entre los valores correspondientes de las tres funciones $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$, se cumplen las desigualdades $u \leq z \leq v$, y, además, $u(x)$ y $v(x)$ tienden a un mismo límite b , cuando $x \rightarrow a$ (o cuando $x \rightarrow \infty$), entonces podemos afirmar que la función $z = z(x)$ también tiende a este mismo límite, cuando $x \rightarrow a$ (o cuando $x \rightarrow \infty$).

Demostración. Para precisar las ideas, examinemos la variación de las funciones, cuando $x \rightarrow a$. De las desigualdades $u \leq z \leq v$ se infiere que:

$$u - b \leq z - b \leq v - b;$$

según las condiciones del teorema, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} u = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} v = b.$$

Por tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$, se encontrará alguna vecindad con centro en el punto a , en la que se verificará la desigualdad $|u - b| < \varepsilon$; del mismo modo se encontrará también alguna vecindad con centro en el punto a , en la que se verificará la desigualdad $|v - b| < \varepsilon$. En la vecindad menor de las mencionadas se cumplirán las desigualdades:

$$-\varepsilon < u - b < \varepsilon \text{ y } -\varepsilon < v - b < \varepsilon$$

y, por tanto, también, se cumplirán las desigualdades

$$- \varepsilon < z - b < \varepsilon,$$

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} z = b.$$

Teorema 5. Si, cuando $x \rightarrow a$ (o cuando $x \rightarrow \infty$), la función y , tomando valores no negativos ($y \geq 0$), tiende al límite b , éste último será un número no negativo, o sea $b \geq 0$.

Demostración. Supongamos que $b < 0$, entonces $|y - b| \geq |b|$, es decir, el módulo de la diferencia $|y - b|$ es mayor que el número positivo $|b|$ y, por tanto, no tiende a cero, cuando $x \rightarrow a$. Pero, en este caso y no tiende a b , cuando $x \rightarrow a$, lo que contradice a la condición del teorema. Esto quiere decir que la hipótesis de que $b < 0$ no es cierta y, por tanto, $b \geq 0$.

De la misma manera se demuestra que $\lim y \leq 0$, si $y \leq 0$.

Teorema 6. Si entre los valores correspondientes de dos funciones, $u = u(x)$ y $v = v(x)$, que tienden a sus límites respectivos, cuando $x \rightarrow a$ (o cuando $x \rightarrow \infty$), se cumple la desigualdad $v \geq u$, también se verificará que $\lim v \geq \lim u$.

Demostración. Dada la condición $v - u \geq 0$, y, de acuerdo con el teorema 5, $\lim (v - u) \geq 0$ o $\lim v - \lim u \geq 0$, es decir, $\lim v \geq \lim u$.

Ejemplo 6. Demostremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Según la fig. 42, si $OA = 1$ y $x > 0$, tendremos $AC = \sin x$, $AB = x$, $\sin x < x$. Es evidente que, siendo

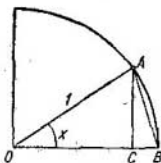


Fig. 42

$x < 0$, tenemos $|\sin x| < |x|$. Según los teoremas 5 y 6, podemos deducir de estas dos desigualdades que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Ejemplo 7. Demostremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$.

En efecto, $\left| \sin \frac{x}{2} \right| < \left| \sin x \right|$. Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$.

Ejemplo 8. Demostremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Siendo $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, tenemos, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) =$
 $= 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1$.

En algunas investigaciones respecto al límite de las variables es necesario resolver dos problemas independientes:

1) demostrar que una variable tiene su límite y determinar los confines dentro de los cuales se encuentra este límite.

2) calcular el límite dado con el grado de precisión necesaria.

A veces el primer problema se resuelve mediante el siguiente importante teorema.

Teorema 7. Si la magnitud variable v es creciente, es decir, cada valor posterior de la misma es mayor que el anterior, y si ésta es acotada, o sea $v < M$, entonces dicha variable tiene como límite $\lim v = a$, donde $a \leq M$.

En el caso de que la magnitud variable sea decreciente y acotada, el teorema correspondiente se enuncia de un modo semejante. No damos aquí la demostración del teorema porque se basa en la teoría de los números reales, que no se considera en el presente curso.

En los dos párrafos siguientes vamos a calcular los límites de dos funciones que tienen gran aplicación en las matemáticas.

§ 6. LIMITE DE LA FUNCION $\frac{\sin x}{x}$, CUANDO $x \rightarrow 0$

La función $\frac{\sin x}{x}$ no está definida para $x = 0$; puesto que tanto el numerador, como el denominador de la fracción se reducen a cero. Veamos el límite de esta función, cuando $x \rightarrow 0$.

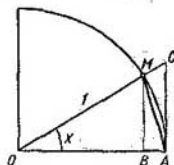


Fig. 43

Consideremos una circunferencia de radio 1 (fig. 43); designemos por x , el ángulo central MOB , siendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. En la fig. 43 se

puede observar que: área $\triangle MOA <$ área del sector $MOA <$ área $\triangle COA$. (1)

$$\text{Área } \triangle MOA = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{sen } x = \frac{1}{2} \text{sen } x.$$

$$\text{Área del sector } MOA = \frac{1}{2} OA \cdot \widehat{AM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x.$$

$$\text{Área } \triangle COA = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{tg } x = \frac{1}{2} \text{tg } x.$$

Suprimiendo el factor $1/2$, la desigualdad (1) se escribirá así:

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x.$$

Dividamos por $\text{sen } x$ todos los miembros y tendremos:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x},$$

o sea,

$$1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x.$$

Hemos obtenido esta desigualdad, suponiendo que $x > 0$.
Teniendo en cuenta que $\frac{\text{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\text{sen } x}{x}$ y $\cos(-x) = \cos x$,

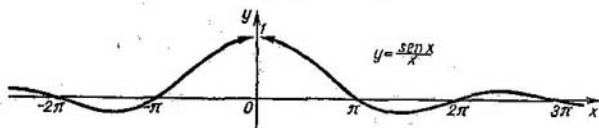


Fig. 44

concluimos que la desigualdad también es válida para $x < 0$. Pero, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. Por tanto, la variable $\frac{\text{sen } x}{x}$ se halla comprendida entre dos magnitudes que tienen 1 por límite. De este modo, de acuerdo con el teorema 4 del párrafo precedente tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

La gráfica de la función $y = \frac{\text{sen } x}{x}$ se expone en la fig. 44.

Ejemplos:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} k \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = k \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (kx \rightarrow 0)}} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{(kx)} = k \cdot 1 = k \quad (k = \text{const}).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\operatorname{sen} \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha x}}{\frac{\operatorname{sen} \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

($\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$).

§ 7. NUMERO e

Examinemos la magnitud variable

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

donde n es una variable creciente que va tomando los valores: 1, 2, 3, ...

Teorema 1. La variable $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tiene su límite comprendido entre los números 2 y 3, cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Según el binomio de Newton, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Después de transformaciones algebraicas evidentes (1), obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

De la última igualdad se deduce que la variable $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente, cuando crece n .

En efecto, cada uno de los sumandos crece al pasar del valor n al $n+1$, es decir:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \text{ etc. y se agrega}$$

un término más. Todos los términos del desarrollo son positivos.

Demostremos que la variable $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ está acotada. Teniendo en cuenta que $\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1$; $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) < 1$, etc., de la expresión (2) obtenemos la desigualdad

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}.$$

Considerando que

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2}; \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3}; \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

podemos escribir

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Los términos subrayados en el segundo miembro de esta desigualdad forman una progresión geométrica que tiene por razón $q =$

$= \frac{1}{2}$ y por primer término, $a = 1$; por esto:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] = \\ &= 1 + \frac{a - aq^n}{1 - q} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 3. \end{aligned}$$

Por tanto, para todos n tenemos:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

De la igualdad (2) se deduce que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

y por tanto obtenemos las desigualdades

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \quad (3)$$

Así pues, queda establecido que la variable $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ está acotada.

Como la variable $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada, tiene (según el teorema 7, § 5) pues, su límite. Este límite se designa con la letra e .

Definición. Se denomina número e al límite*) de la variable $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, cuando $n \rightarrow \infty$:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Conforme al teorema 6, § 5, de la desigualdad (3) podemos deducir que el número e satisface la desigualdad $2 \leq e \leq 3$.

El teorema queda, pues, demostrado.

El número e es irracional. Más adelante exponemos el método para su cálculo con cualquier grado de precisión. Su valor, con diez cifras decimales es:

$$e = 2, 7182818284 \dots$$

*) Se puede demostrar que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$, cuando $n \rightarrow +\infty$, si n no es una variable creciente.

Teorema 2. La función $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ tiende al límite e cuando x tiende al infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Demostración. Hemos establecido que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$, cuando $n \rightarrow \infty$, si n toma valores enteros y positivos. Supongamos ahora que x tiende al infinito, tomando valores tanto fraccionarios como negativos.

1) Supongamos que $x \rightarrow +\infty$. Cada valor de x se halla comprendido entre dos números enteros positivos

$$n \leq x < n+1.$$

En este caso se cumplen las desigualdades:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Si $x \rightarrow \infty$, es evidente que también $n \rightarrow \infty$. Hallemos los límites de las variables entre los cuales se encuentra la variable $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e. \end{aligned}$$

Por tanto, según el teorema 4, § 5, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4)$$

2) Supongamos que $x \rightarrow -\infty$. Introduzcamos una nueva variable $t = -(x + 1)$ o sea $x = -(t + 1)$. Cuando $t \rightarrow +\infty$, tendremos que $x \rightarrow -\infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

El teorema queda demostrado. La gráfica de la función $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ se expone en la fig. 45.

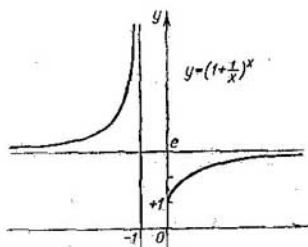


Fig. 45

Si en la igualdad (4) introducimos $\frac{1}{x} = \alpha$, entonces tenemos $\alpha \rightarrow 0$ (pero, $\alpha \neq 0$), cuando $x \rightarrow \infty$, y obtenemos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Ejemplos:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \\ \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = e \cdot 1 = e.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cdot e \cdot e = e^3.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x+3} = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^{y+4} = \\ = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^4 = e^4 \cdot 1 = e^4.$$

§ 8. LOGARITMOS NATURALES

En el párrafo 8 del capítulo primero se ha definido la función logarítmica $y = \log_a x$. Como se sabe, el número a es la base de los logaritmos. Si $a = 10$, entonces y se denomina logaritmo decimal del número x e y se escribe $y = \log x$. En la escuela secundaria se estudian las tablas de logaritmos decimales, llamados también de *Briggs*, nombre del sabio inglés que los inventó (1556-1630).

Los logaritmos que tienen por base el número $e = 2,71828 \dots$, se llaman *naturales* o *neperianos*, en honor del matemático Neper (1550-1617), uno de los primeros inventores de las tablas de logaritmos. Por consiguiente, si $e^y = x$, entonces y se denomina logaritmo natural del número x , y se escribe así: $y = \ln x$, en lugar de $y = \log_e x$. (Véase las gráficas de las funciones $y = \ln x$ e $y = \lg x$ en la fig. 46). Determinemos ahora la correlación que existe entre los logaritmos decimales y los naturales de un mismo número x . Supongamos que $y = \log x$, o sea $x = 10^y$.

Tomemos los logaritmos naturales de los dos miembros de la última ecuación, escogiendo e como base, y tendremos: $\ln x = y \ln 10$, de donde $y = \frac{1}{\ln 10} \ln x$. Sustituyendo el valor de y ten-

demostramos:

$$\log x = \frac{1}{\ln 10} \ln x.$$

Lo que quiere decir que, cuando se conoce el logaritmo natural de un número x , se puede hallar su logaritmo decimal, multiplicándolo por el factor $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,434294$, valor que no depende

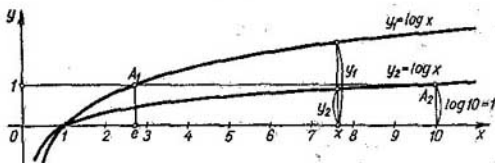


Fig. 46

de x . A este factor M se le denomina módulo o factor de transición de los logaritmos naturales a los decimales:

$$\log x = M \ln x.$$

Al introducir en esta identidad $x = e$, hallaremos la expresión del número M por medio de logaritmos decimales:

$$\log e = M (\ln e = 1).$$

Los logaritmos naturales se expresan en logaritmos decimales de la manera siguiente:

$$\ln x = \frac{1}{M} \log x,$$

donde $\frac{1}{M} = 2,302585$.

Observación. Existen tablas especiales para el cálculo de logaritmos naturales.

§ 9. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida para cierto valor x_0 y en cierta vecindad de centro en el mismo punto. Sea: $y_0 = f(x_0)$.

Si x recibe cierto incremento Δx (positivo o negativo), y toma el valor $x = x_0 + \Delta x$, la función y también resultará incrementada

en Δy . El nuevo valor incrementado de la función será $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ (fig. 47). El incremento de la función Δy se expresa mediante la fórmula

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

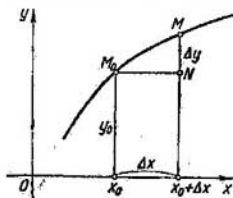


Fig. 47

Definición 1. La función $y = f(x)$ se considera *continua*, para el valor de $x = x_0$ (o en el punto x_0), si está definida en cierta vecindad del punto x_0 , (incluido el punto x_0) y si:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (1)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0. \quad (2)$$

La condición (2) se puede escribir así:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

o

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (2)$$

En lenguaje geométrico la continuidad de la función en el punto dado significa que la diferencia de las ordenadas de la gráfica $y = f(x)$ en los puntos $x_0 + \Delta x$ y x_0 será, en valor absoluto, arbitrariamente pequeña a condición de que $|\Delta x|$ sea lo suficientemente pequeño.

Ejemplo 1. Demostremos que la función $y = x^2$ es continua en el punto x_0 , arbitrariamente elegido. En efecto,

$$y_0 = x_0^2, \quad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2, \quad \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 2x_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0,$$

independiente del modo en que Δx tiende a cero (fig. 48a y b).

Ejemplo 2. Comprobemos que la función $y = \sin x$ es continua en cualquier punto arbitrario x_0 . En efecto,

$$y_0 = \sin x_0, \quad y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x),$$

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

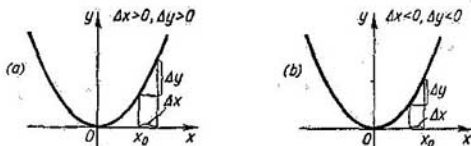


Fig. 48

Ya hemos visto que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$ (ejemplo 7, § 5). La función $\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ está acotada. Por consiguiente,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Del mismo modo se puede demostrar que cualquier función elemental fundamental es continua en cada punto en el que la función esté definida.

Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 1. Siendo las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ continuas en el punto x_0 , su suma $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$, también será función continua en el mismo punto x_0 .

Demostración. Siendo continuas $f_1(x)$ y $f_2(x)$, de acuerdo con la igualdad (2'), podemos escribir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = f_1(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = f_2(x_0).$$

Según el teorema 1 sobre límites, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) =$$

$$= f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0), \text{ es decir,}$$

la suma $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ es una función continua, como se trataba de demostrar.

Como corolario, observemos que el teorema citado es válido para cualquier número de sumandos.

Basándose en las propiedades de los límites, se puede demostrar también los teoremas siguientes:

a) El producto de dos funciones continuas es una función continua.

b) El cociente de dos funciones continuas es una función continua, si el denominador no se reduce a cero en el punto considerado.

c) Si $u = \varphi(x)$ es una función continua para $x = x_0$ y si $f(u)$ también es continua en el punto $u_0 = \varphi(x_0)$, la función compuesta $f[\varphi(x)]$ será continua en el punto x_0 .

Basándose en estos teoremas se puede formular el siguiente teorema.

Teorema 2. *Cualquier función elemental es continua en cada punto en el cual la función está definida.*

Observación. Dado que en la igualdad (2')

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x,$$

podemos escribirla así:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x), \quad (3)$$

es decir, que para hallar el límite de la función continua cuando $x \rightarrow x_0$, basta sustituir el argumento x por su valor x_0 en la expresión de la función.

Ejemplo 3. La función $y = x^2$ es continua en cualquier punto x_0 , y por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 3^2 = 9.$$

Ejemplo 4. La función $y = \sin x$ es continua en cualquier punto, de donde

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ejemplo 5. La función $y = e^x$ es continua en cualquier punto y por tanto: $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$.

Ejemplo 6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}].$$

Ya que $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ y la función $\ln z$ es continua para $z > 0$ y, por lo tanto,

para $z = e$, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[\left(1 + x \right)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \right)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1.$$

Definición 2. Se dice que la función $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo dado (a, b) , donde $a < b$, siempre que ésta sea continua en cada uno de sus puntos.

Si la función está definida también en el punto $x = a$ siendo $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$, se dice que en el punto $x = a$ la función $f(x)$ es continua por la derecha. Siendo $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$, se dice que en el punto $x = b$ la función $f(x)$ es continua por la izquierda.

Si la función $f(x)$ es continua en cada punto del intervalo (a, b) , y lo es al mismo tiempo en los extremos de éste (por la derecha y por la izquierda, respectivamente) se dice que la función $f(x)$ es continua en el intervalo o segmento cerrado $[a, b]$.

Ejemplo 7. La función $y = x^2$ es continua en cualquier segmento $[a, b]$, como se deduce del ejemplo 1.

Si en algún punto $x = x_0$ para la función $y = f(x)$ no se cumple por lo menos una de las condiciones de continuidad, es decir, si para $x = x_0$ la función no está definida o no existe el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ o bien $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ cuando $x \rightarrow x_0$ de una manera arbitraria, a pesar de que existen las expresiones a la derecha y a la izquierda, entonces la función $y = f(x)$ es discontinua, cuando $x = x_0$. El punto $x = x_0$ se denomina, en este caso, punto de discontinuidad de la función.

Ejemplo 8. La función $y = \frac{1}{x}$ es discontinua cuando $x = 0$. En efecto, cuando $x = 0$, la función no está definida:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Es fácil demostrar que esta función es continua para cualquier valor de $x \neq 0$.

Ejemplo 9. La función $y = 2^{\frac{1}{x}}$ es discontinua en $x = 0$. En efecto, $\lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. La función no está definida en $x = 0$ (fig. 49).

Ejemplo 10. Examinemos la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Si $x < 0$, $\frac{x}{|x|} = -1$, para $x > 0$, $\frac{x}{|x|} = 1$. Por consiguiente,

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x}{|x|} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{|x|} = 1;$$

cuando $x=0$, la función no está definida. De esta manera hemos establecido que la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$ es discontinua en $x=0$ (fig. 50).

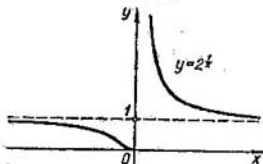


Fig. 49

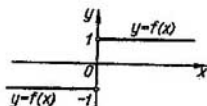


Fig. 50

Ejemplo 11. La función $y = \sin \frac{1}{x}$ examinada en el ejemplo 4, § 3, es discontinua en $x=0$.

Definición 3. Supongamos que la función $f(x)$ tiene los límites finitos: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, que son desiguales, es decir: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, o el valor de la función $f(x)$ no está definido, cuando $x = x_0$. En este caso, el punto $x = x_0$ se denomina *punto de discontinuidad de primer género*. (Para la función examinada en el ejemplo 10, el punto $x = 0$, es un punto de discontinuidad de primer género).

§ 10. ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

En este párrafo examinaremos algunas propiedades de las funciones continuas sobre un segmento. Estas propiedades las presentaremos como teoremas cuya demostración no se da en este libro.

Teorema 1. Si la función $y = f(x)$ es continua sobre cierto segmento $[a, b]$ ($a \leq x \leq b$), siempre se encontrará en este segmento por lo menos un punto $x = x_1$ tal que el valor de la función en dicho punto satisfaga la correlación

$$f(x_1) \geq f(x),$$

en la que x es cualquier otro punto del segmento, y se encontrará también por lo menos un punto x_2 tal que el valor de la función en el mismo satisfaga la relación

$$f(x_2) \leq f(x).$$

El valor de la función $f(x_1)$ se llama *valor máximo* de la función $y = f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y el de la función $f(x_2)$ se denomina *valor mínimo* de la función en el mismo segmento $[a, b]$.

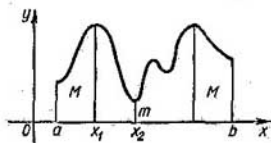


Fig. 51

Este teorema se enuncia brevemente así: *la función continua sobre el segmento $a \leq x \leq b$ alcanza, una vez por lo menos, su valor máximo M y su valor mínimo m .*

La interpretación geométrica de este teorema se representa en la fig. 51.

Observación. El teorema enunciado puede no ser cierto, debido a que entre los valores de la función mencionada pueden no existir los valores máximo y mínimo en el intervalo $a < x < b$. Si, por ejemplo, examinamos la función $y = x$ en el intervalo $0 < x < 1$ no hallamos entre sus valores el máximo, ni el mínimo. En realidad esto debe ser así, pues no existe el punto extremo izquierdo, ya que si tomamos cualquier punto x^* habrá siempre otro punto, por ejemplo $\frac{x^*}{2}$, más a la izquierda que x^* . Por la misma razón no existe el punto extremo derecho y, por tanto, no puede haber valor máximo ni mínimo de la función $y = x$.

Teorema 2. *Si la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, tomando en los extremos de éste valores de signos contrarios, entre los puntos a y b se hallará por lo menos un punto $x = c$, en el que la función se reduce a cero:*

$$f(c) = 0, \quad a < c < b.$$

Este teorema tiene una sencilla interpretación geométrica. La gráfica de la función continua $y = f(x)$, que une los puntos $M_1[a, f(a)]$ y $M_2[b, f(b)]$, donde $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (o $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$), corta el eje Ox por lo menos en un punto (fig. 52).

Ejemplo. Sea la función $y = x^3 - 2$. Se tiene: $y_{x=1} = -1$, $y_{x=2} = 6$. Esta función es continua en el segmento $[1, 2]$. Por tanto, en éste existe un punto donde $y = x^3 - 2$ se reduce a cero. En efecto, $y = 0$ cuando $x = \sqrt[3]{2}$ (fig. 53).

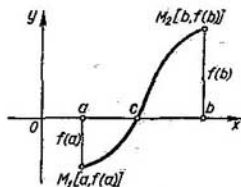


Fig. 52

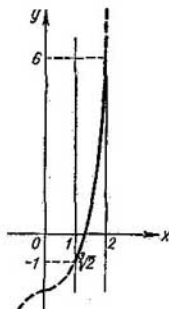


Fig. 53

Teorema 3. Sea $y = f(x)$ una función definida y continua sobre el segmento $[a, b]$. Si en los extremos del segmento dado la función toma valores diferentes $f(a) = A$, $f(b) = B$, siempre se encontrará

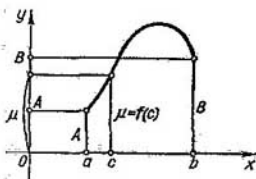


Fig. 54

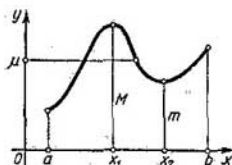


Fig. 55

un punto $x = c$, comprendido entre a y b , tal que $f(c) = \mu$, cualquiera que sea el número μ comprendido entre los valores A y B .

Este teorema se interpreta claramente en la fig. 54. En el caso dado, cualquier recta $y = \mu$ cortará la gráfica de la función $y = f(x)$.

Observación. El teorema 2 es un caso particular del teorema 3, ya que, teniendo A y B signos contrarios, podemos tomar el número 0

como valor de μ , y entonces $\mu = 0$ resultará comprendido entre los números A y B .

Corolario del teorema 3. Si la función $y = f(x)$ es continua sobre cierto intervalo, tomando los valores máximo y mínimo, se puede deducir que en el intervalo enunciado la función toma, por lo menos una vez, cualquier valor comprendido entre sus valores extremos.

En efecto, supongamos que $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Según el teorema 3, en el segmento $[x_1, x_2]$ la función $y = f(x)$ toma cualquier valor μ , comprendido entre M y m . Pero el segmento $[x_1, x_2]$ se encuentra dentro del intervalo considerado, en el cual está definida la función $f(x)$ (fig. 55).

§ 11. COMPARACION DE LAS MAGNITUDES INFINITESIMALES

Supongamos que unas cuantas magnitudes infinitamente pequeñas (infinitesimales) α , β , γ , ... son funciones de un mismo argumento x , y tienden a cero cuando x tiende al límite a o al infinito. Analicemos la tendencia de estas variables a cero, considerando la razón de las mismas.*

En adelante usaremos las siguientes definiciones.

Definición 1. Si la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ tiene un límite finito y distinto de cero, es decir, que $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$ y, por tanto, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{A} \neq 0$, se dice que las infinitesimales α y β son del mismo orden.

Ejemplo 1. Supóngase que $\alpha = x$, $\beta = \sin 2x$, donde $x \rightarrow 0$. Las infinitesimales α y β son del mismo orden, ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

Ejemplo 2. Cuando $x \rightarrow 0$, las infinitesimales x , $\sin 3x$, $\operatorname{tg} 2x$, $\ln(1+x)$ son todas del mismo orden. La demostración es análoga a la del ejemplo 1.

Definición 2. Si la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ de dos infinitesimales tiende a cero, es decir, si $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ (y $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$), entonces la infinitesimal β se denomina infinitesimal del orden superior que α ; recíprocamente, α será una infinitesimal de orden inferior que β .

*) Partimos de que la infinitesimal que sirve de denominador no se reduce a cero en alguna vecindad del punto a .

Ejemplo 3. Supongamos que $\alpha = x$, $\beta = x^n$, $n > 1$, $x \rightarrow 0$. La infinitesimal β es de orden superior que la α , puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} = 0.$$

Recíprocamente la infinitesimal α es de orden inferior que la β .

Definición 3. Se dice que β es *magnitud infinitamente pequeña de orden k respecto a α* , si β y α^k son infinitesimales del mismo orden, es decir, si $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$.

Ejemplo 4. Si $\alpha = x$, $\beta = x^3$, cuando $x \rightarrow 0$, la infinitesimal β es una infinitesimal de tercer orden respecto a la infinitesimal α , puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(x)^3} = 1.$$

Definición 4. Si la razón de dos infinitesimales $\frac{\beta}{\alpha}$ tiende a la unidad, es decir, si $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, estas infinitesimales se denominan equivalentes: y se escriben así: $\alpha \sim \beta$.

Ejemplo 5. Supongamos que $\alpha = x$ y $\beta = \sin x$, donde $x \rightarrow 0$. Las infinitesimales α y β son equivalentes, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ejemplo 6. Supongamos que $\alpha = x$, $\beta = \ln(1+x)$, donde $x \rightarrow 0$. Las infinitesimales α y β son equivalentes, ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(véase ejemplo 6, § 9).

Teorema 1. Si α y β son infinitesimales equivalentes, su diferencia $\alpha - \beta$ es una infinitesimal de orden superior que las α y β .

Demostración. En efecto,

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) = 1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

Teorema 2. (Recíproco del anterior). Si la diferencia de dos infinitesimales $\alpha - \beta$ es una infinitesimal de orden superior que las α y β , éstas son infinitesimales equivalentes.

Demostración. Supongamos que $\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0$, entonces:

$\lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, o sea, $1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, o bien, $1 = \lim \frac{\beta}{\alpha}$, es decir, $\alpha \approx \beta$.

Si $\lim \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$, se tiene $\lim \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = 0$, o bien $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, es decir, $\alpha \approx \beta$.

Ejemplo 7. Supongamos que $\alpha = x$ y $\beta = x + x^3$, donde $x \rightarrow 0$.

Las infinitesimales α y β son equivalentes, ya que su diferencia $\beta - \alpha = x^3$ es una infinitesimal de orden superior que α y β . En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{x + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{1 + x^2} = 0.$$

Ejemplo 8. Cuando $x \rightarrow \infty$, las infinitesimales $\alpha = \frac{x+1}{x^2}$ y $\beta = \frac{1}{x}$ son equivalentes, puesto que su diferencia $\alpha - \beta = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ es una infinitesimal de orden superior que α y β . El límite de la razón α respecto a β es 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Observación. Si la razón $\frac{\beta}{\alpha}$ de dos infinitesimales no tiene límite y no tiende al infinito, entonces β y α no son comparables en el sentido mencionado anteriormente.

Ejemplo 9. Supongamos que $\alpha = x$, $\beta = x \sin \frac{1}{x}$, donde $x \rightarrow 0$. Las infinitesimales α y β no son comparables, dado que su razón $\frac{\beta}{\alpha} = \sin \frac{1}{x}$ no tiende a ningún límite finito, ni infinito, cuando $x \rightarrow 0$, (véase ejemplo 4 § 3).

Ejercicios para el capítulo II

Calcular los límites siguientes:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$. Respuesta: 4. 2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [2 \sin x - \cos x + \cotg x]$. Respuesta: 2.

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. Respuesta: 0. 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)$. Respuesta: 2.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 5}$. Respuesta: $\frac{4}{3}$. 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}$. Respuesta: 1.
 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$. Respuesta: $\frac{1}{2}$. 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$. Respuesta: $\frac{1}{3}$.

Indicaciones. Expresemos la fórmula $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ para $k=0, 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1; \\ 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1; \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1; \\ &\vdots \\ (n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + (n+1),$$

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$

de donde

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{2x + 5}$. Respuesta: ∞ . 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$. Respuesta: 0.
 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^3 + 2x}$. Respuesta: $\frac{1}{2}$. 12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Respuesta: 4.
 13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$. Respuesta: 3. 14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$. Respuesta: $\frac{1}{8}$.
 15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$. Respuesta: 1. 16. $\lim_{y \rightarrow -2} \frac{y^3 + 3y^2 + 2y}{y^2 - y - 6}$. Respuesta: $-\frac{2}{5}$.
 17. $\lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^3 + 4u^2 + 4u}{(u+2)(u-3)}$. Respuesta: 0. 18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$. Respuesta: $3x^2$.
 19. $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x} \right]$. Respuesta: -1 . 20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$. Respuesta: n
 (n es un número entero positivo). 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$. Respuesta: $\frac{1}{2}$.
 22. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$. Respuesta: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q}$. Respuesta: $\frac{q}{p}$.
 24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$. Respuesta: $\frac{2}{3}$. 25. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a}$. Respuesta: $\frac{\sqrt[m]{a}}{ma}$.
 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$. Respuesta: $\frac{1}{2}$. 27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{x^3 + 1}}$. Respuesta: 1.
 28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$. Respuesta: 1 cuando $x \rightarrow +\infty$, -1 cuando $x \rightarrow -\infty$.

29. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$. Respuesta: 0. 30. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$. Respuesta: $\frac{1}{2}$ cuando $x \rightarrow +\infty$, $-\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$. 31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$. Respuesta: 1. 32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$. Respuesta: 4. 33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{3}}{x^2}$. Respuesta: $\frac{1}{9}$.
34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$. Respuesta: $\frac{2}{\sqrt{2}}$. 35. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x$. Respuesta: 1. 36. $\lim_{v \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos v}{\operatorname{sen}(v-\frac{\pi}{3})}$. Respuesta: $\sqrt{3}$. 37. $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$. Respuesta: $\frac{2}{\pi}$.
38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsen x}{3x}$. Respuesta: $\frac{2}{3}$. 39. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen}(a-x)}{x}$. Respuesta: $2 \cos a$. 40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$. Respuesta: $\frac{1}{2}$. 41. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$. Respuesta: e^2 . 42. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$. Respuesta: $\frac{1}{e}$. 43. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$. Respuesta: $\frac{1}{e}$. 44. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$. Respuesta: e . 45. $\lim_{n \rightarrow \infty} \{n(\ln(n+1) - \ln n)\}$. Respuesta: 1. 46. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$. Respuesta: e^3 . 47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$. Respuesta: α . 48. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. Respuesta: e . 49. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\cotg^2 x}$. Respuesta: e^3 . 50. $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{m}\right)^m$. Respuesta: 1. 51. $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^\alpha)}{\alpha}$. Respuesta: 1 cuando $\alpha \rightarrow +\infty$, 0 cuando $\alpha \rightarrow -\infty$. 52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\operatorname{sen} \beta x}$. Respuesta: $\frac{\alpha}{\beta}$. 53. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - 1}{x}$ ($a > 1$). Respuesta: $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$, 0 cuando $x \rightarrow -\infty$. 54. $\lim_{n \rightarrow \infty} n[a^{\frac{1}{n}} - 1]$. Respuesta: $\ln a$. 55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$. Respuesta: $\alpha - \beta$. 56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\operatorname{sen} \alpha x - \operatorname{sen} \beta x}$. Respuesta: 1.

Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones:

57. $y = \frac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$. Respuesta: Discontinuidad para $x = -2$; -1 ; 0 ;
 58. $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$. Respuesta: Discontinuidad para $x = 0$ y $x = \pm \frac{2}{\pi}$; $\pm \frac{2}{3\pi}$; ...
 ...; $\frac{2}{(2n+1)\pi}$; ...

59. Hallar los puntos de discontinuidad de la función $y = 1 + 2^{\frac{1}{x}}$ y construir la gráfica de esta función. *Respuesta:* Discontinuidad para $x = 0$ ($y \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0+0$, $y \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow 0-0$).

60. Entre las infinitesimales (cuando $x \rightarrow 0$) siguientes: x^2 , $\sqrt{x(1-x)}$, $\sin 3x$, $2x \cos x \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$, xe^{2x} , elijan las infinitesimales del mismo orden que la infinitesimal x , así como las de orden superior e inferior a x . *Respuesta:* Las infinitesimales del mismo orden son: $\sin 3x$ y xe^{2x} , las de orden superior x^2 y $2x \cos x \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$ y la infinitesimal de orden inferior es $\sqrt{x(1-x)}$.

61. Entre las infinitesimales indicadas (cuando $x \rightarrow 0$) hallar las infinitesimales que son equivalentes a la infinitesimal x : $2 \sin x$, $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$, $x - 3x^3$, $\sqrt{2x^2 + x^3}$, $\ln(1+x)$, $x^3 + 3x^4$. *Respuesta:* $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$, $x - 3x^3$, $\ln(1+x)$.

62. Demostrar que, cuando $x \rightarrow 1$, las infinitesimales $1-x$ y $1 - \sqrt[3]{x}$ son del mismo orden. ¿Serán equivalentes? *Respuesta:* $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sqrt[3]{x}} = 3$, por consiguiente, las infinitesimales son de un mismo orden, pero no son equivalentes.

DERIVADA Y DIFERENCIAL

§ 1. VELOCIDAD DEL MOVIMIENTO

Examinemos el movimiento rectilíneo de un cuerpo sólido, por ejemplo, el de una piedra lanzada verticalmente hacia arriba o el de un pistón en el cilindro de un motor.

Haciendo abstracción de las dimensiones y configuración concretas del cuerpo, imaginémoslo en adelante como un punto móvil M . La distancia s del punto móvil, que se mide a partir de cierta posición inicial M_0 , dependerá del tiempo t , es decir, s será función de t :

$$s = f(t). \quad (1)$$

Supongamos que en un instante dado* t , el punto móvil M se encuentre a la distancia s de la posición inicial M_0 y unos instantes después, $t + \Delta t$, se encontrará en la posición M_1 , a la distancia $s + \Delta s$ de la posición inicial (fig. 56). Por consiguiente, durante el intervalo de tiempo Δt el espacio recorrido s ha cambiado en una magnitud Δs . Se dice que, en este caso, en el intervalo de tiempo Δt la magnitud s adquirió el incremento Δs .

Consideremos la razón $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Esta representa la velocidad media del punto durante el tiempo Δt :

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2)$$

Sin embargo, la velocidad media no puede caracterizar, en todos los casos, con la debida precisión, la rapidez del desplazamiento del punto M en el momento t . Así, por ejemplo, si el cuerpo al comienzo del intervalo Δt se desplaza con rapidez, mientras que al final de éste lo hace lentamente, la velocidad media no podrá reflejar estas peculiaridades del movimiento del punto y darnos una idea correcta de la velocidad real de su movimiento en el instante t .

*) Aquí, y en adelante, el valor concreto de una variable lo designaremos con la misma letra que empleamos para la propia variable.

Para expresar la velocidad real con mayor precisión, sirviéndose de la velocidad media, es necesario tomar un intervalo de tiempo Δt menor. El límite hacia el cual tiende la velocidad media, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, caracteriza de la manera más completa la velocidad del punto en el instante t . Este límite se llama *velocidad del movimiento en el instante dado*:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3)$$

Así, pues, la *velocidad del movimiento en el instante dado* se llama límite de la razón del incremento del espacio recorrido Δs al incremento de tiempo Δt , cuando éste último incremento tiende a cero.

Desarrollemos la igualdad (3).

Como

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

obtenemos

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (3')$$

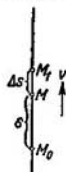


Fig. 56

que será la velocidad del movimiento no uniforme. De este modo vemos que el concepto de velocidad del movimiento no uniforme está estrechamente unido al de límite. Sólo a través del concepto de límite se puede determinar la velocidad del movimiento no uniforme.

De la fórmula (3') se deduce que v no depende del incremento de tiempo Δt , sino del valor t y del carácter de la función $f(t)$.

Ejemplo. Hallar la velocidad del movimiento uniformemente acelerado en un instante arbitrario t y en el $t = 2$ seg, si el espacio recorrido en función del tiempo se expresa por la fórmula siguiente:

$$s = \frac{1}{2} g t^2.$$

Solución. En el instante t se tiene: $s = \frac{1}{2} g t^2$, y en el instante $t + \Delta t$ tendremos:

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Calculemos ahora Δs : $\Delta s = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2} g t^2 = g t \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$ y tendremos la razón $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g t \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2}{\Delta t} = g t + \frac{1}{2} g \Delta t.$$

Según la definición de velocidad tenemos:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt + \frac{1}{2} g \Delta t \right) = gt.$$

Así pues, la velocidad en un instante t cualquiera es $v = gt$. Cuando $t = 2$ tenemos $(v)_{t=2} = g \cdot 2 = 9,8 \cdot 2 = 19,6 \text{ m/seg.}$

§ 2. DEFINICION DE LA DERIVADA

Sea

$$y = f(x), \quad (1)$$

una función definida en cierto intervalo. A cada valor del argumento x en este intervalo corresponde un valor determinado de la función $y = f(x)$.

Admitamos que el argumento x tome un incremento Δx , (positivo o negativo, no importa). Entonces, la función y tomará cierto incremento Δy . De este modo:

al valor del argumento x le corresponde $y = f(x)$,

al valor del argumento $x + \Delta x$ le corresponde $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Calculemos el incremento de la función Δy :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (2)$$

Veamos la razón del incremento de la función al del argumento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Halleemos el límite de esta razón, cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Si existe este límite se llama *derivada* de la función dada $f(x)$ y se designa por $f'(x)$. Según la definición tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

o sea,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Por consiguiente, se llama *derivada* de la función dada $y = f(x)$, respecto al argumento x , el límite de la razón del incremento de esta función Δy al incremento del argumento Δx , cuando éste tiende a cero de manera arbitraria.

Observemos que en el caso general, a cada valor de x le corresponde un valor determinado de la derivada $f'(x)$, es decir, la derivada es también *función de x* .

Simultáneamente con la notación $f'(x)$ para la derivada se emplean también, otras designaciones. Por ejemplo:

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}.$$

El valor concreto de la derivada, para $x = a$, se designa por $f'(a)$ o $y'|_{x=a}$.

La operación que tiene por objeto hallar la derivada de la función $f(x)$, se llama *derivación* de esta función (se usa también el término «diferenciación»).

Ejemplo 1. Dada la función $y = x^3$. Hallar su derivada y' :

1) en un punto cualquiera x ,

2) para $x = 3$.

Solución. 1) Cuando el valor del argumento es igual a x , $y = x^3$. Cuando el valor del argumento es igual a $x + \Delta x$, $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$.

Hallemos el incremento de la función

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 2x\Delta x + (\Delta x)^3.$$

Formemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Pasando al límite, encontraremos la derivada de la función:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Así, pues, la derivada de la función $y = x^3$ en un punto cualquiera se expresará por:

$$y' = 2x.$$

2) Para $x = 3$ obtendremos:

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Ejemplo 2.

$$y = \frac{1}{x}; \text{ hallar } y'.$$

Solución. Como en el ejemplo anterior, tendremos

$$y = \frac{1}{x}; \quad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Observación. En el párrafo anterior se estableció que, si el espacio s recorrido por el punto móvil, en función del tiempo t , viene dado por la fórmula

$$s = f(t),$$

entonces la velocidad v en el instante t se expresará por la fórmula:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Por tanto,

$$v = s'_t = f'(t),$$

es decir, la velocidad es igual a la derivada* del espacio respecto al tiempo t .

§ 3. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Hemos llegado al concepto de derivada, examinando la velocidad del movimiento de un cuerpo (punto), es decir, partiendo de

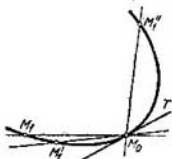


Fig. 57

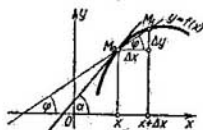


Fig. 58

razonamientos puramente *mecánicos*. Ahora daremos a la derivada otra interpretación, la *geométrica*, también muy importante.

Para ello es necesario, ante todo, definir la *tangente* a una curva en un punto dado.

Sea una curva y un punto fijo M_0 en ella. Tomemos en la curva otro punto M_1 y tracemos una secante M_0M_1 (fig. 57). Si el punto M_1 se aproxima ilimitadamente al punto M_0 , desplazándose por la curva, la secante M_0M_1 ocupará las diversas posiciones $M_0M'_1$, $M_0M''_1$, etc. Si, con la aproximación ilimitada del punto M_1 por la curva al punto M_0 (independientemente del lado por el que se aproxima), la secante tiende a ocupar la posición de una recta deter-

*) Cuando decimos «derivada respecto a x » o «derivada respecto al tiempo t », etc., tenemos en cuenta que, al hallar la derivada, la variable x o el tiempo t , etc., se consideran como argumentos.

minada M_0T , esta última se llama tangente a la curva en el punto M_0 (el concepto «tiende a ocupar» se precisará más adelante).

Examinemos la función $f(x)$ y la curva correspondiente,

$$y = f(x),$$

en el sistema de coordenadas rectangulares (fig. 58). A cierto valor de x le corresponde un valor de la función $y = f(x)$. A los valores dados de x e y les corresponde en la curva el punto $M_0(x, y)$. Demos al argumento x un incremento Δx . Al nuevo valor del argumento $x + \Delta x$ le corresponde un valor «incrementado» de la función $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. A este último le corresponde en la curva el punto $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Tracemos la secante M_0M_1 y designemos por φ el ángulo formado por la secante y la dirección positiva del eje Ox . Formemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. De la figura 58 se deduce que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Cuando Δx tiende a cero, el punto M_1 se desplazará a lo largo de la curva, aproximándose al punto M_0 . La secante M_0M_1 girará alrededor del punto M_0 y el ángulo φ variará, al variar Δx . Si, para $\Delta x \rightarrow 0$, el ángulo φ tiende a cierto límite α , la recta que pasa por el punto M_0 y que forma con la dirección positiva del eje de abscisas el ángulo α , será precisamente la tangente que se busca. Sin dificultad hallaremos el coeficiente angular de esta tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Por tanto,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2)$$

Fig. 59

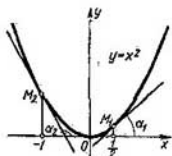
es decir, el valor de la derivada $f'(x)$ correspondiente al valor dado del argumento x , será igual a la tangente del ángulo formado por la dirección positiva del eje Ox y la tangente a la curva de la función $f(x)$ en el punto correspondiente $M_0(x, y)$.

Ejemplo. Hallar las tangentes de los ángulos de inclinación de la línea tangente a la curva $y = x^2$ en los puntos

$$M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right); M_2(-1, 1) \text{ (fig. 59).}$$

Solución. En virtud del ejemplo 1 § 2, se tiene: $y' = 2x$; entonces:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1; \operatorname{tg} \alpha_2 = y' \Big|_{x=-1} = -2.$$



§ 4. DERIVACION DE LAS FUNCIONES

Definición. Si la función

$$y = f(x) \quad (1)$$

tiene derivada en el punto $x = x_0$, es decir, si existe

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (2)$$

se dice que para el valor dado $x = x_0$ la función es *derivable* o, lo que es lo mismo, tiene derivada.

Si la función es derivable en *cada punto* de un cierto segmento $[a, b]$ o intervalo (a, b) , se dice que la función es *derivable sobre el segmento* $[a, b]$ o, respectivamente, *en el intervalo* (a, b) .

Teorema. Si la función $y = f(x)$ es derivable en un punto $x = x_0$, será continua en este punto.

En efecto, si

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

se tiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

donde γ es una magnitud que tiende a cero, cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Pero en este caso

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \gamma \Delta x;$$

de donde se deduce que $\Delta y \rightarrow 0$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, lo que quiere decir que la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 (véase § 9 del capítulo II).

De este modo, en los puntos de discontinuidad la función no puede tener derivada. La recíproca no es cierta, es decir, que de la continuidad de la función $y = f(x)$ en cierto punto $x = x_0$ no se deduce que en este punto la función es necesariamente derivable: la función $f(x)$ puede no tener derivada en el punto x_0 . Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. La función $f(x)$ está definida en el segmento $[0, 2]$ de la manera siguiente (fig. 60):

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \text{ cuando } 0 \leq x \leq 1, \\ f(x) &= 2x - 1, \text{ cuando } 1 < x \leq 2. \end{aligned}$$

Esta función no tiene derivada en $x=1$, aunque es continua en este punto.

En efecto, cuando $\Delta x > 0$, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(1+\Delta x) - 1 - [2 \cdot 1 - 1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

cuando $\Delta x < 0$, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[1+\Delta x] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Es decir que este límite depende del signo de Δx , lo que significa, a su vez, que en el punto $x = 1$ la función no tiene derivada*. Geométricamente, esto

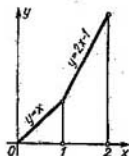


Fig. 60

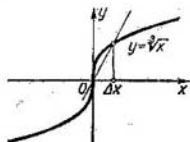


Fig. 61

significa que en el punto $x = 1$ la «curva» dada no tiene tangente determinada.

La continuidad de la función en el punto $x = 1$ se deduce de lo siguiente:

$$\Delta y = \Delta x, \text{ cuando } \Delta x < 0,$$

$$\Delta y = 2\Delta x, \text{ cuando } \Delta x > 0.$$

Por tanto, en ambos casos $\Delta y \rightarrow 0$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Ejemplo 2. La función $y = \sqrt[3]{x}$, cuya gráfica se muestra en la fig. 61, está definida y es continua para todos los valores de la variable independiente. Veamos, si esta función tiene derivada en el punto $x = 0$. Hallemos los valores de la función en $x = 0$ y en $x = 0 + \Delta x$. Cuando $x = 0$, tenemos $y = 0$. Cuando $x = 0 + \Delta x$, $y + \Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}$.

Por consiguiente,

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

Hallemos el límite de la razón del incremento de la función al del argumento:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Así pues, la razón del incremento de la función al del argumento tiende al infinito en el punto $x = 0$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, y, por tanto, no tiene límite. Por consiguiente, esta función no es derivable en el punto $x = 0$. La tangente

* Según la definición de derivada, es necesario que la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tienda a un mismo límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, independientemente de la manera en que Δx tiende a cero.

a la curva en este punto forma con el eje de abscisas un ángulo $\frac{\pi}{2}$, es decir, coincide con el eje Oy .

§ 5. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES.

DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = x^n$,

SIENDO n ENTERO Y POSITIVO

Para hallar la derivada de una función dada $y = f(x)$, basándose en la definición general de derivada, es necesario:

1) dar al argumento x un incremento Δx y calcular el valor incrementado de la función:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

2) hallar el incremento correspondiente de la función:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) formar la razón del incremento de la función al del argumento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4) calcular el límite de la razón mencionada, cuando $\Delta x \rightarrow 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Este método general de cálculo de derivadas lo emplearemos para obtener las derivadas de algunas funciones elementales.

Teorema. La derivada de la función $y = x^n$ en la que n es un número entero y positivo, es igual a nx^{n-1} , es decir,

$$\text{siendo } y = x^n, \quad y' = nx^{n-1}. \quad (I)$$

Demostración. Sea la función

$$y = x^n.$$

1) Si x adquiere un incremento Δx , se tiene:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

2) Según el binomio de Newton tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n &= x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \rightarrow x^n \end{aligned}$$

6

$$\Delta y = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

3) Hallamos la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}.$$

4) El límite de esta expresión será:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $y' = nx^{n-1}$, lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo 1.

$$y = x^5, \quad y' = 5x^{5-1} = 5x^4.$$

Ejemplo 2. $y = x$, $y' = 1x^{1-1}$, $y' = 1$. El último resultado tiene una interpretación geométrica muy sencilla: la línea tangente a la recta $y = x$ coincide con esta recta, sea cual fuese el valor de x , y, por tanto, forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a 1.

Observemos que la fórmula (I) es válida también, cuando n es negativo o fraccionario, como comprobaremos en el § 12.

Ejemplo 3. $y = \sqrt{x}$.

Representemos esta función en forma de potencia

$$y = x^{\frac{1}{2}}.$$

Según la fórmula (I) (teniendo en cuenta la observación que acabamos de hacer), obtenemos:

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

6

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ejemplo 4. $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

Representemos y en forma de función potencial

$$y = x^{-\frac{3}{2}}.$$

Entonces,

$$y' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

§ 6. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES $y = \sin x$;

$$y = \cos x$$

Teorema 1. La derivada de $\sin x$ es $\cos x$, es decir,

$$\text{si } y = \sin x, \quad y' = \cos x. \quad (\text{II})$$

Demostración. Demos al argumento x un incremento Δx , entonces:

$$1) \quad y + \Delta y = \sin(x + \Delta x);$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right); \end{aligned}$$

$$3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right);$$

$$4) \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

pero, puesto que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

se tiene:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.$$

Esta igualdad se obtiene, teniendo en cuenta que $\cos x$ es una función continua:

Teorema 2. La derivada de $\cos x$ es $-\sin x$, es decir,

$$\text{si } y = \cos x, \quad y' = -\sin x. \quad (\text{III})$$

Demostración: Demos al argumento x un incremento Δx . Entonces:

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x);$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x - x}{2} \operatorname{sen} \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ &= -2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} - \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);\end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} x$ es una función continua, finalmente tenemos:

$$y' = -\operatorname{sen} x.$$

**§ 7. DERIVADAS DE UNA MAGNITUD CONSTANTE,
DEL PRODUCTO DE UNA MAGNITUD CONSTANTE
POR UNA FUNCIÓN, DE UNA SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE**

Teorema 1. *La derivada de una constante es igual a cero, es decir, si $y = C$ y $C = \text{const}$, se tiene $y' = 0$.* (IV)

Demostración. $y = C$ es una función de x tal que todos sus valores son iguales a C para cualquier x .

Por tanto, cualquiera que sea el valor de x , se tiene:

$$y = f(x) = C.$$

Demos al argumento x un incremento Δx ($\Delta x \neq 0$). Como la función y conserva el valor C para todos los valores del argumento, se tiene

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C.$$

Esto quiere decir que el incremento de la función es igual a cero:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0.$$

La razón del incremento de la función al del argumento es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

y, por tanto,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

es decir, $y' = 0$.

Este resultado tiene una sencilla interpretación geométrica. La gráfica de la función $y = C$ es una recta paralela al eje Ox . Por tanto, la línea tangente a la gráfica coincide con esta recta en cada uno de sus puntos y, como consecuencia, forma con el eje Ox un ángulo cuya tangente y' es igual a cero.

Teorema 2. El factor constante se puede escribir fuera del signo de derivada, es decir,

$$\text{si } y = Cu(x), \text{ donde } C = \text{const}, \text{ entonces } y' = Cu'(x). \quad (V)$$

Demostración. Razonando como en el teorema anterior, tenemos:

$$y = Cu(x),$$

$$y + \Delta y = Cu(x + \Delta x),$$

$$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \text{ es decir, } y' = Cu'(x).$$

Ejemplo 1. $y = 3 \frac{1}{\sqrt{x}},$

$$y' = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = 3 \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' = 3 \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}},$$

es decir,

$$y' = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

Teorema 3. La derivada de la suma de un número finito de las funciones derivables es igual a la suma de las derivadas de estas funciones*).

Por ejemplo, en el caso de tres sumandos tenemos:

$$y = u(x) + v(x) + w(x); \quad y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \quad (\text{VI})$$

Demostración: Para los valores del argumento x se tiene:

$$y = u + v + w$$

(para abreviar, omitimos x en la designación de la función).

Para el valor del argumento $x + \Delta x$ tenemos:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w);$$

donde Δy , Δu , Δv y Δw son incrementos de las funciones y , u , v y w , que corresponden al incremento Δx del argumento x . Por consiguiente,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

6

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

Ejemplo 2. $y = 3x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$

$$y' = 3(x^4)' - \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 3 \cdot 4x^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1},$$

es decir,

$$y' = 12x^3 + \frac{1}{3} \frac{1}{x \sqrt[3]{x}}.$$

Teorema 4. La derivada del producto de dos funciones derivables es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda, más el producto de la primera función por la derivada de la segunda, es decir, si $y = uv$, entonces $y' = u'v + uv'$. (VII)

Demostración. De un modo análogo al teorema anterior, obtenemos:

$$y = uv,$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u v + u \Delta v + \Delta u \Delta v,$$

* La expresión $y = u(x) - v(x)$ es idéntica a la expresión $y = u(x) + (-1)v(x)$ y, por consiguiente,

$$y' = [u(x) + (-1)v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) v + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \end{aligned}$$

ya que u y v no dependen de Δx .

Analicemos el último término del segundo miembro

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Puesto que la función $u(x)$ es derivable, será también continua. Por tanto, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$. Además

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \neq \infty.$$

Así, el término examinado es igual a cero y en definitiva tenemos:

$$y' = u'v + uv'$$

Basándonos en el teorema demostrado se deduce fácilmente la regla para la derivación del producto de cualquier número de funciones.

Si tenemos, por ejemplo, el producto de tres funciones

$$y = uvw,$$

entonces, representando el segundo miembro como producto de u y (vw) obtenemos: $y' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$. De la misma manera se deduce una fórmula análoga para la derivada del producto de cualquier número (finito) de funciones. Es decir, si $y = u_1 u_2 \dots u_n$, tenemos:

$$y' = u_1' u_2 \dots u_n + u_1 u_2' \dots u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1}' u_n.$$

Ejemplo 3. Si $y = x^2 \operatorname{sen} x$, se tiene:

$$y' = (x^2)' \operatorname{sen} x + x^2 (\operatorname{sen} x)' = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x.$$

Ejemplo 4. Si $y = \sqrt{x} \operatorname{sen} x \cos x$, se tiene:

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x})' \operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{x} (\operatorname{sen} x)' \cos x + \sqrt{x} \operatorname{sen} x (\cos x)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{x} \cos x \cos x + \sqrt{x} \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{x} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x. \end{aligned}$$

Teorema 5. La derivada de una fracción (es decir, del cociente de la división de una función por otra) es igual a otra fracción que tiene por denominador el cuadrado del denominador de la fracción dada y por numerador, la diferencia entre el producto del denominador por la derivada del numerador y el producto del numerador por la derivada del denominador; es decir si $y = \frac{u}{v}$, se tiene $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. (VIII)

Demostración. Si Δy , Δu y Δv son los incrementos de las funciones y , u , v que corresponden al incremento Δx del argumento x entonces se tiene:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v \Delta u - u \Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)}.$$

Observando que $\Delta v \rightarrow 0$, cuando $\Delta x \rightarrow 0^*$, obtenemos:

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Ejemplo 5. Si $y = \frac{x^3}{\cos x}$, tendremos:

$$y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sen x}{\cos^2 x}.$$

Observación. Dada una función del tipo

$$y = \frac{u(x)}{C},$$

en la que el denominador C es una constante, para derivar esta función no hace falta recurrir a la fórmula (VIII); en este caso es más

*) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$, ya que la función $v(x)$ es derivable y, por consiguiente, continua.

conveniente la fórmula (V):

$$y' = \left(\frac{1}{C} u \right)' = \frac{1}{C} u' = \frac{u'}{C}.$$

Es obvio que este mismo resultado se obtiene, aplicando la fórmula (VIII).

Ejemplo 6. Si $y = \frac{\cos x}{7}$, tendremos:

$$y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\operatorname{sen} x}{7}.$$

§ 8. DERIVADA DE LA FUNCION LOGARITMICA

Teorema. La derivada de la función $\log_a x$ es igual a $\frac{1}{x} \log_a e$, es decir, si $y = \log_a x$, se tiene $y' = \frac{1}{x} \log_a e$. (IX)

Demostración. Supongamos que Δy es el incremento de la función $y = \log_a x$, correspondiente al incremento Δx del argumento x . Entonces:

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Multiplicando y dividiendo por x el segundo miembro de la última igualdad obtendremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Designemos por α la magnitud $\frac{\Delta x}{x}$. Para un valor dado de x , $\alpha \rightarrow 0$, si $\Delta x \rightarrow 0$. Por tanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Sin embargo, como se sabe, (§ 7, cap. II),

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Si la expresión que se halla bajo el signo de logaritmo tiende al número e , el logaritmo de ésta tiende hacia $\log_a e$ (en virtud de la continuidad de la función logarítmica). Según esto, tendremos en definitiva:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Considerando que $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, la fórmula obtenida puede escribirse como sigue:

$$y' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}.$$

Veamos el siguiente caso particular. Si en esta fórmula $a = e$, $\ln a = \ln e = 1$, es decir, cuando $y = \ln x$, se tiene

$$y' = \frac{1}{x}. \quad (X)$$

§ 9. DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

Supongamos $y = f(x)$ una función compuesta, es decir, una función tal que pueda ser representada en la forma siguiente:

$$y = F(u), \quad u = \varphi(x)$$

o $y = F[\varphi(x)]$ (cap. I, § 8). La variable u en la expresión $y = F(u)$ se denomina argumento (variable) intermedio.

Establezcamos la regla de derivación de una función compuesta.

Teorema. Si en cierto punto x la función $u = \varphi(x)$ tiene por derivada $u'_x = \varphi'(x)$ y la función $y = F(u)$ tiene por derivada $y'_u = F'(u)$ para el valor correspondiente de u , la función compuesta $y = F[\varphi(x)]$ en el punto dado x tendrá también derivada, cuya expresión será:

$$y'_x = F'_u(u) \varphi'(x),$$

donde u debe ser sustituida por $u = \varphi(x)$. La fórmula obtenida se puede expresar en forma abreviada, como sigue:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

es decir que la derivada de una función compuesta es igual al producto de la derivada de la función dada respecto al argumento intermedio u por la derivada del argumento intermedio respecto a x .

Demostración. Para un valor determinado de x , se tiene:

$$u = \varphi(x), \quad y = F(u).$$

Para el valor incrementado del argumento $x + \Delta x$, tenemos:

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \quad y + \Delta y = F(u + \Delta u).$$

Al incremento Δx le corresponde el incremento Δu , al que, a su vez, corresponde el incremento Δy ; además, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, Δu y Δy tenderán también a cero. Según la hipótesis:

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Según la definición de límite, obtendremos (para $\Delta u \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha \quad (1)$$

donde $\alpha \rightarrow 0$, cuando $\Delta u \rightarrow 0$. Escribamos la ecuación (1) en la forma:

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u. \quad (2)$$

Sea cual fuese α , la ecuación (2) se verifica también para $\Delta u = 0$, puesto que se convierte en identidad, $0 = 0$. Cuando $\Delta u = 0$, suponemos que $\alpha = 0$. Dividiendo por Δx los dos miembros de la ecuación (2), tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (3)$$

Según la hipótesis:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Pasando al límite en la ecuación (3), cuando $\Delta x \rightarrow 0$, hallaremos:

$$y'_x = y'_u u'_x. \quad (4)$$

Ejemplo 1. Dada la función $y = \sin(x^2)$, hallar y'_x . Interpretemos la función propuesta como función de función:

$$y = \sin u, \quad u = x^2.$$

Tenemos $y'_u = \cos u$, $u'_x = 2x$.

Por tanto, según la fórmula (4):

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2x$$

y sustituyendo u por su expresión, obtenemos en definitiva:

$$y'_x = 2x \cos(x^2).$$

Ejemplo 2. Dada la función $y = (\ln x)^3$, hallar y'_x . Representemos la función propuesta de la forma siguiente:

$$y = u^3, \quad u = \ln x.$$

Tenemos

$$y'_u = 3u^2, \quad u'_x = \frac{1}{x}.$$

Por consiguiente,

$$y'_x = 3u^2 \cdot \frac{1}{x} = 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}.$$

Si la función $y = f(x)$ es tal que puede ser representada en la forma

$$y = F(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

su derivada y'_x se obtiene, aplicando sucesivamente el teorema anterior.

Sabemos que

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Aplicando el mismo teorema para hallar u'_x , tenemos:

$$u'_x = u'_v v'_x,$$

y sustituyendo en la primera igualdad el factor u'_x por su expresión, obtenemos:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x \quad (5)$$

6

$$y'_x = F'_u(u) \varphi'_v(v) \psi'_x(x).$$

Ejemplo 3. Dada la función $y = \sin[(\ln x)^3]$, hallar y'_x . Representemos la función propuesta en la forma

$$y = \sin u, \quad u = v^3, \quad v = \ln x.$$

Tenemos:

$$y'_u = \cos u, \quad u'_v = 3v^2, \quad v'_x = \frac{1}{x}.$$

Por tanto, según la fórmula (5):

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3(\cos u) v^2 \cdot \frac{1}{x},$$

y finalmente:

$$y'_x = \cos[(\ln x)^3] \cdot 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}.$$

Hay que tener en cuenta que la función examinada está definida sólo cuando $x > 0$.

§ 10. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES $y = \operatorname{tg} x$,

$$y = \operatorname{cotg} x, y = \ln |x|$$

Teorema 1. La derivada de la función $y = \operatorname{tg} x$ es igual a $\frac{1}{\cos^2 x}$, es decir, si $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. (XI)

Demostración. Sea

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

de la fórmula para derivar fracciones (véase fórmula (VIII), § 7, capítulo III), se tiene:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Teorema 2. La derivada de la función $y = \operatorname{cotg} x$ es igual a $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$, es decir:

$$\text{si } y = \operatorname{cotg} x, y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \quad (\text{XII})$$

Demostración. Sea

$$y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

se tendrá

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - \cos x (\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \\ &= -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Si $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}.$$

Ejemplo 2. Si $y = \ln \operatorname{cotg} x$,

$$y' = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} (\operatorname{cotg} x)' = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right) = -\frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} = -\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

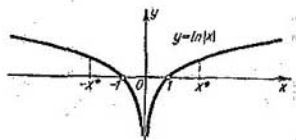


Fig. 62

Teorema 3. La derivada de la función $y = \ln |x|$ (fig. 62) es igual a $\frac{1}{x}$, es decir,

$$\text{si } y = \ln |x|, \quad y' = \frac{1}{x}. \quad (\text{XIII})$$

Demostración. a) Si $x > 0$, se tiene $|x| = x$, $\ln |x| = \ln x$, y por tanto:

$$y' = \frac{1}{x}.$$

b) Supongamos que $x < 0$. Entonces $|x| = -x$. Pero

$$\ln |x| = \ln (-x),$$

(observemos, que si $x < 0$, $-x > 0$).

Interpretemos la función $y = \ln (-x)$ como función compuesta, haciendo

$$y = \ln u; \quad u = -x.$$

Entonces,

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u} (-1) = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}.$$

De este modo, para los valores negativos de x también se verifica la igualdad

$$y'_x = \frac{1}{x}.$$

Por tanto, la fórmula (XIII) queda demostrada para cualquier valor de $x \neq 0$ (para $x = 0$ la función $\ln |x|$ no está definida).

§ 11. FUNCION IMPLICITA Y SU DERIVACION

Supongamos que los valores de dos variables, x e y , se encuentran ligados mediante una ecuación que, simbólicamente, escribiremos así:

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Si la función $y = f(x)$ definida en cierto intervalo (a, b) es tal que, al sustituir y en la ecuación (1) por la expresión $f(x)$, la ecuación

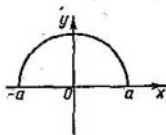


Fig. 63

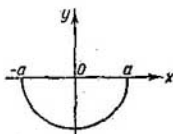


Fig. 64

se convierte en una identidad respecto a x , la función $y = f(x)$ recibe el nombre de función implícita determinada por la ecuación (1).

Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (2)$$

determina implícitamente las siguientes funciones elementales (figuras 63 y 64):

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}. \quad (4)$$

En efecto, al sustituir y por sus expresiones en la ecuación (2), la convertiremos en identidad, es decir

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

Las expresiones (3) y (4) se han obtenido mediante la resolución de la ecuación (2) respecto a y . Sin embargo, no toda función, dada implícitamente puede ser representada en forma explícita, es decir, en forma $y = f(x)$ *, donde $f(x)$ es una función elemental.

* Si la función viene dada en la forma $y = f(x)$, se dice que está dada en forma *explícita* o que es una función *explícita*.

Por ejemplo, las funciones dadas por las ecuaciones

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

6

$$y - x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} y = 0,$$

no pueden ser expresadas mediante funciones elementales; es decir, no pueden ser resueltas respecto a y .

Observación 1. Es necesario señalar que los términos «función explícita» y «función implícita» no caracterizan la naturaleza de la función, sino la manera en que ésta viene dada.

Toda función explícita, $y = f(x)$, puede ser representada también en forma implícita, $y - f(x) = 0$.

Veamos cómo se obtiene la derivada de una función implícita, sin transformarla en explícita, es decir, sin representarla en la forma $y = f(x)$.

Supongamos que la función viene dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Si y es una función de x , determinada por la ecuación anterior, ésta será una identidad.

Al derivar ambos miembros de la identidad respecto a x , considerando que y es una función de x , obtendremos (aplicando la regla para derivar función compuesta):

$$2x + 2yy' = 0,$$

de donde:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Anotemos que, si derivamos la correspondiente función explícita

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

obtenemos:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

es decir, el mismo resultado.

Examinemos un ejemplo más de función implícita y en función de x :

$$y^6 - y - x^2 = 0.$$

Derivemos respecto a x

$$6y^5y' - y' - 2x = 0,$$

y hallamos

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

Observación 2. De los ejemplos citados se deduce que, si se trata de hallar la derivada de una función implícita para un valor dado del argumento x , es preciso conocer primeramente el valor de la función y para el mismo valor dado de x .

**§ 12. DERIVADAS DE LA FUNCIÓN POTENCIAL
CON EXPONENTE REAL CUALQUIERA,
DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL
Y DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL COMPUESTA**

Teorema 1. La derivada de la función x^n , en la que n es un número real cualquiera, es igual a nx^{n-1} , es decir,

$$\text{si } y = x^n, \text{ se tiene } y' = nx^{n-1}. \quad (I)$$

Demostración. Supongamos que $x > 0$. Tomando logaritmos de la función dada, tendremos

$$\ln y = n \ln x.$$

Derivemos ambos miembros de la ecuación respecto a x , considerando que y es función de x :

$$\frac{y'}{y} = n \frac{1}{x}; \quad y' = yn \frac{1}{x}.$$

Introduciendo aquí el valor $y = x^n$, obtenemos en definitiva:

$$y' = nx^{n-1}.$$

Es fácil demostrar que esta fórmula es correcta también, cuando $x < 0$, siempre que x^n tenga sentido*).

Teorema 2. La derivada de la función a^x , en la que $a > 0$, es igual a $a^x \ln a$, es decir,

$$\text{si } y = a^x, \quad y' = a^x \ln a. \quad (XIV)$$

Demostración. Tomando logaritmos de la igualdad $y = a^x$, se tiene:

$$\ln y = x \ln a.$$

*) Dicha fórmula ha sido ya demostrada (§ 5, cap. III) para el caso en que n es un número entero y positivo. Ahora la fórmula (I) queda generalizada para cualquier número constante n .

Derivemos la igualdad obtenida, considerando y como función de x .

$$\frac{1}{y} y' = \ln a; y' = y \ln a,$$

o sea

$$y' = a^x \ln a.$$

Si la base es $a = e$, entonces $\ln e = 1$, y obtenemos la fórmula:

$$y = e^x, y' = e^x. \quad (\text{XIV})$$

Ejemplo 1. Dada la función

$$y = e^{x^2}.$$

Interpretémosla como función compuesta, introduciendo el argumento intermedio u :

$$y = e^u, u = x^2;$$

entonces,

$$y'_u = e^u, u'_x = 2x.$$

Por tanto,

$$y'_x = e^u 2x = e^{x^2} 2x.$$

La función en la que tanto la base como el exponente son funciones de x se llama *función exponencial compuesta*. Por ejemplo, $(\sin x)^{x^2}$, $x^{1/x}$, x^x , $(\ln x)^x$ y, en general, toda función de la forma

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v.$$

Teorema 3.

$$\text{Si } y = u^v, \text{ entonces } y' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u. \quad (\text{XV})$$

Demostración. Tomemos logaritmos de la función y :

$$\ln y = v \ln u.$$

Derivando respecto a x la igualdad obtenida, tenemos:

$$\frac{1}{y} y' = v \frac{1}{u} u' + v' \ln u,$$

de donde:

$$y' = y \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right).$$

Introduciendo la expresión $y = u^v$, obtenemos:

$$y' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u.$$

*) Tal función se suele llamar también *exponencial potencial* o *potencial exponencial*.

Así, pues, la derivada de la función exponencial compuesta consta de dos términos que se obtienen del siguiente modo: el primer sumando si, al derivar, suponemos que u es función de x , mientras que v es constante (u^v se interpreta como función *potencial*); el segundo, si suponemos que v es función de x , permaneciendo u constante (u^v se interpreta como función *exponencial*)

Ejemplo 2. Si $y = x^x$, $y' = x x^{x-1} (x') + x^x (x') \ln x$, o sea, $y' = x^x + x^x \ln x = x^x (1 + \ln x)$.

Ejemplo 3. Si $y = (\sin x)^{x^2}$, tendremos

$$\begin{aligned} y' &= x^2 (\sin x)^{x^2-1} (\sin x)' + (\sin x)^{x^2} (x^2)' \ln \sin x = \\ &= x^2 (\sin x)^{x^2-1} \cos x + (\sin x)^{x^2} 2x \ln \sin x. \end{aligned}$$

El procedimiento, aplicado en este párrafo para calcular derivadas, consiste en hallar primeramente la derivada del *logaritmo de la función dada*. Este procedimiento se utiliza ampliamente en la derivación de funciones, y, a veces, simplifica mucho los cálculos.

Ejemplo 4. Hallar la derivada de la función

$$y = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}.$$

Solución. Tomando logaritmos, encontramos:

$$\ln y = 2 \ln (x+1) + \frac{1}{2} \ln (x-1) - 3 \ln (x+4) - x.$$

Derivemos ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

Multiplicando por y , y sustituyendo y por $\frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$, obtenemos

$$y' = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1 \right].$$

Observación. La expresión $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$, que es la derivada respecto a x del logaritmo natural de la función dada $y = y(x)$, se llama *derivada logarítmica*.

§ 13. FUNCIÓN INVERSA Y SU DERIVACION

Supongamos

$$y = f(x) \quad (1)$$

es una función creciente (fig. 65) o decreciente definida en cierto intervalo (a, b) ($a < b$) (§ 6, cap. I). Hagamos $f(a) = c$ y $f(b) = d$. Para concretar, en adelante consideraremos sólo la función creciente.

Examinemos dos valores diferentes x_1 y x_2 pertenecientes al intervalo (a, b) . De la definición de función creciente se deduce que, si $x_1 < x_2$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, entonces $y_1 < y_2$. Por tanto, a dos valores x_1 y x_2 , les corresponden dos valores diferentes

y_1 e y_2 de la función. La recíproca también es cierta. Es decir, si $y_1 < y_2$, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, entonces, de la definición de función creciente, se deduce que $x_1 < x_2$. De este modo, entre los valores de x y los correspondientes de y se establece una relación biunívoca.

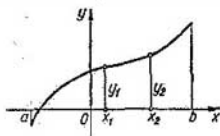


Fig. 65

Interpretando los valores de y como valores del argumento, y los valores de x como valores de la función, obtendremos x como función de y :

$$x = \varphi(y). \quad (2)$$

Esta función se denomina *inversa* de la función $y = f(x)$.

Recíprocamente la función $y = f(x)$ es la inversa de la función $x = \varphi(y)$.

Razonando del mismo modo, se puede demostrar que una función decreciente también tiene su inversa.

Observación 1. Indiquemos, sin demostración, que, si la función creciente (decreciente) $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, siendo $f(a) = c$ y $f(b) = d$, entonces la función inversa estará definida y será continua en el segmento $[c, d]$.

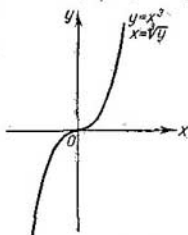


Fig. 66

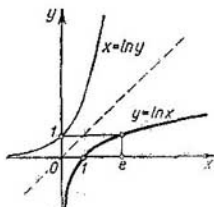


Fig. 67

Ejemplo 1. Sea la función $y = x^3$. Esta función es creciente en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$ y su inversa es $x = \sqrt[3]{y}$ (fig. 66).

Observemos que la función inversa $x = \varphi(y)$ se halla, resolviendo la ecuación $y = f(x)$ respecto a x .

Ejemplo 2. Sea la función $y = e^x$. Esta función es creciente en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$; su inversa es $x = \ln y$. El dominio de definición de ésta es $0 < y < +\infty$ (fig. 67).

Observación 2. Si la función $y = f(x)$ no es creciente, ni decreciente en cierto intervalo, ella puede tener varias funciones inversas*).

Ejemplo 3. La función $y = x^2$ está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$. No es creciente, ni decreciente, ni tampoco tiene función inversa. En el intervalo $0 < x < +\infty$ dicha función es creciente y su inversa es $x = \sqrt{y}$. En el intervalo $-\infty < x < 0$ la misma función será decreciente y su inversa es $x = -\sqrt{y}$ (fig. 68).

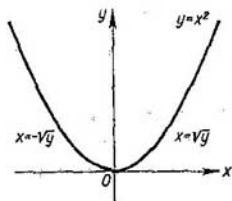


Fig. 68

Observación 3. Siendo $y = f(x)$ y $x = \varphi(y)$ funciones recíprocamente inversas, sus gráficas se representan por una misma curva.

Pero, si designamos por x el argumento de la función inversa y por y la propia función, entonces las gráficas de las dos funciones serán ya distintas en un mismo sistema de coordenadas.

Es fácil ver que las gráficas serán simétricas con respecto a la bisectriz del primer ángulo de coordenadas.

Ejemplo 4. En la figura 67 están trazadas las gráficas de la función $y = e^x$ (o de $x = \ln y$) y de su inversa, $y = \ln x$, examinadas en el ejemplo 2.

El siguiente teorema nos permitirá calcular la derivada de la función $y = f(x)$, conociendo la derivada de la función inversa.

Teorema: Si para la función

$$y = f(x) \quad (1)$$

existe una función inversa

$$x = \varphi(y) \quad (2)$$

tal que en un punto analizado y tiene derivada $\varphi'(y)$, distinta de cero, entonces la función $y = f(x)$, en el punto correspondiente x , tiene derivada $f'(x)$, igual a $\frac{1}{\varphi'(y)}$, es decir, se verifica la fórmula

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \quad (\text{XVI})$$

*) Insistimos que, al decir que y es función de x , entendemos que y depende de x de modo unívoco.

De este modo, la derivada de una de las dos funciones recíprocamente inversas es igual a la unidad dividida por la derivada de la segunda función, para los correspondientes valores de x e y^* .

Demostración. Dando a y el incremento Δy , de la igualdad (2) deducimos

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

Como $\varphi(y)$ es una función monótona, se tiene $\Delta x \neq 0$. Escribamos la identidad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Por ser continua la función $\varphi(y)$, $\Delta x \rightarrow 0$, cuando $\Delta y \rightarrow 0$.

Tomando el límite, cuando $\Delta y \rightarrow 0$, en ambos miembros de la última identidad obtenemos:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y},$$

o sea,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

es decir, llegamos a la fórmula (XVI).

Observación. La fórmula (XVI) se puede obtener también, aplicando el teorema de derivación de funciones compuestas.

En efecto, derivemos los dos miembros de la igualdad (2) respecto a x , considerando que y es función de x :

$$1 = \varphi'(y) y'_x,$$

de donde:

$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

La interpretación geométrica es evidente. Examinemos la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 69). La misma curva será la gráfica

*) Cuando escribimos $f'(x)$ o y'_x , consideramos que, al calcular la derivada, tomamos x como variable independiente. Cuando escribimos $\varphi'(y)$ o x'_y , consideramos que, al calcular la derivada, la variable independiente es y . Observemos que después de obtener la derivada respecto a y que figura en el 2º miembro de la fórmula (XVI), es necesario sustituir y por $f(x)$.

de la función $x = \varphi(y)$ en la que x se considera como función e y , como variable independiente. Consideremos un punto $M(x, y)$ de esta curva. Tracemos una tangente a la misma en este punto. Los ángulos formados por la tangente mencionada y las direcciones positivas de los ejes Ox y Oy los designaremos por α y β respectivamente. En virtud de los resultados obtenidos en el § 3, acerca del significado geométrico de la derivada, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \varphi'(y) &= \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

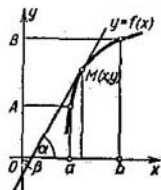


Fig. 69

De la figura 69 se deduce que, si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, se tiene:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Ahora bien, si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, naturalmente $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$.

Por consiguiente, en cualquier caso

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha$$

de donde

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

o sea

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Introduciendo aquí las expresiones de $\operatorname{tg} \alpha$ y $\operatorname{tg} \beta$ de la fórmula (3), obtenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

§ 14. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS Y SU DERIVACION

1) Función: $y = \operatorname{arcsen} x$.
Examinemos la función

$$x = \operatorname{sen} y \quad (1)$$

y construyamos su gráfica, dirigiendo el eje Oy verticalmente hacia arriba (fig. 70). Esta función está definida en el intervalo infinito $-\infty < y < +\infty$. En el segmento $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, la función $x = \operatorname{sen} y$

es creciente, sus valores llenan el segmento $-1 \leq x \leq 1$. Por eso la función $x = \operatorname{sen} y$ tiene su inversa, que se escribe así: $y = \operatorname{arcsen} x^*$.

Esta función está definida en el segmento $-1 \leq x \leq 1$, sus valores llenan el segmento $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

En la figura 70 la gráfica de la función $y = \operatorname{arcsen} x$ va en línea gruesa.

Teorema 1. La derivada de la función

$\operatorname{arcsen} x$ es igual a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, es decir,

si $y = \operatorname{arcsen} x$, se tiene $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (XVIII)

Demostración. Según la igualdad (1) tenemos:

$$x'_y = \cos y,$$

y conforme a la regla para derivar la función inversa, será;

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y},$$

pero

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Entonces

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La raíz lleva el signo positivo, porque el valor de la función $y = \operatorname{arcsen} x$ se encuentra en el segmento $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ de donde $\cos y \geq 0$.

Ejemplo 1. $y = \operatorname{arcsen} e^x$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} (e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Ejemplo 2. $y = \left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{x} \right)^2$,

$$y' = 2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x} \right)' = -2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}.$$

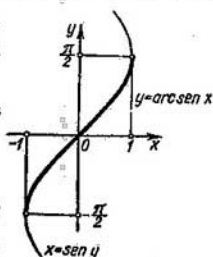


Fig. 70

* Observamos que la igualdad $y = \operatorname{arcsen} x$ conocida del curso de trigonometría, es otra forma de escribir la igualdad (1). Aquí (dado x), y significa conjunto de valores de los ángulos, cuyo seno es igual a x .

2) Función: $y = \arccos x$.

Como en el caso anterior, examinemos la función

$$x = \cos y, \quad (2)$$

construyamos su gráfica y dirijamos el eje Oy hacia arriba (fig. 71). Esta función está definida en el intervalo infinito $-\infty < y < +\infty$. En el segmento $0 \leq y \leq \pi$ la función $x = \cos y$ es decreciente y tiene su inversa designada así:

$$y = \arccos x.$$

Esta función está definida en el segmento $-1 \leq x \leq 1$. Los valores de la función llenan el segmento $\pi \geq y \geq 0$. En la figura 71 la gráfica de la función $y = \arccos x$ va en línea gruesa.

Teorema 2. La derivada de la función $\arccos x$ es igual a $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, es decir, si $y = \arccos x$, se tiene $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (XVIII)

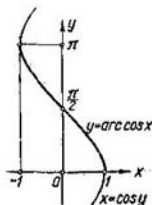


Fig. 71

Demostración. Según la igualdad (2) tenemos:

$$x'_y = -\sin y.$$

Por tanto,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$

Pero $\cos y = x$, entonces:

$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En la igualdad $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ la raíz lleva el signo positivo, porque los valores de la función $y = \arccos x$ se encuentran en el segmento $0 \leq y \leq \pi$, por consiguiente $\sin y \geq 0$.

Ejemplo 3. $y = \arccos(\operatorname{tg} x)$,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} (\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) Función: $y = \operatorname{arctg} x$.
Examinemos la función

$$x = \operatorname{tg} y$$

y construyamos su gráfica (fig. 72). Esta función está definida para todos los valores de y , excepto $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

En el intervalo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ la función $x = \operatorname{tg} y$ es creciente y tiene su inversa:

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

La función está definida en el intervalo $-\infty < x < +\infty$ y sus valores llenan el intervalo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. En la figura 72, la gráfica de la función $y = \operatorname{arctg} x$ va en línea gruesa.

Teorema 3. La derivada de la función $\operatorname{arctg} x$ es igual a $\frac{1}{1+x^2}$,

es decir, si $y = \operatorname{arctg} x$, se tiene $y' = \frac{1}{1+x^2}$. (XIX)

Demostración. Según la igualdad (3) tenemos:

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Por tanto,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

pero

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y};$$

y, puesto que $\operatorname{tg} y = x$, tenemos en definitiva:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ejemplo 4. $y = (\operatorname{arctg} x)^4$,

$$y' = 4(\operatorname{arctg} x)^3 (\operatorname{arctg} x)' = 4(\operatorname{arctg} x)^3 \frac{1}{1+x^2}.$$

4) Función: $y = \operatorname{arccotg} x$.

Examinemos la función

$$x = \operatorname{cotg} y. \quad (4)$$

Esta función está definida para todos los valores de y , excepto $y = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2$). La gráfica de la función está representada

en la figura 73. En el intervalo $0 < y < \pi$ la función $x = \cotg y$ es decreciente y tiene su inversa, la cual se designa así:

$$y = \operatorname{arccotg} x.$$

La función, por tanto, está definida en el intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$ y sus valores llenan el intervalo $\pi > y > 0$.

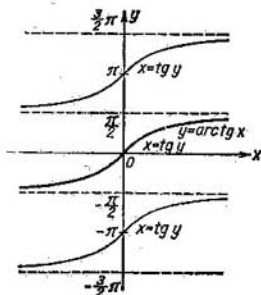


Fig. 72

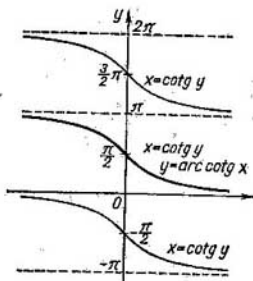


Fig. 73

Teorema 4. La derivada de la función $\operatorname{arccotg} x$ es igual a $-\frac{1}{1+x^2}$, es decir,

$$\text{si } y = \operatorname{arccotg} x, \text{ se tiene } y' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (\text{XX})$$

Demostración: Según la igualdad (4):

$$x'_y = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 y}.$$

Por consiguiente,

$$y'_x = -\operatorname{sen}^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\cotg^2 y}.$$

Pero

$$\cotg y = x.$$

Luego,

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§ 15. TABLA DE LAS FÓRMULAS FUNDAMENTALES PARA LA DERIVACIÓN

Agrupamos ahora en una tabla todas las fórmulas fundamentales y reglas de derivación, obtenidas en los párrafos anteriores.
Fórmulas fundamentales

$$y = \text{const}, \quad y' = 0.$$

Función potencial:

$$y = x^{\alpha}, \quad y' = \alpha x^{\alpha-1};$$

en particular,

$$y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Funciones trigonométricas:

$$y = \text{sen } x, \quad y' = \cos x,$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\text{sen } x,$$

$$y = \text{tg } x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y = \text{cotg } x, \quad y' = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}.$$

Funciones trigonométricas inversas:

$$y = \text{arcsen } x, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \text{arccos } x, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \text{arctg } x, \quad y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \text{arccotg } x, \quad y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Función exponencial:

$$y = a^x, \quad y' = a^x \ln a;$$

en particular,

$$y = e^x, \quad y' = e^x.$$

Función logarítmica:

$$y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e;$$

en particular,

$$y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x}.$$

Reglas generales de derivación:

$$y = Cu(x), \quad y' = Cu'(x) \quad (C = \text{const}),$$

$$y = u + v - w, \quad y' = u' + v' - w',$$

$$y = u \cdot v, \quad y' = u'v + uv',$$

$$y = \frac{u}{v}, \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$\left. \begin{array}{l} y = f(u), \\ u = \varphi(x), \end{array} \right\} \quad y'_x = f'_u(u) \varphi'_x(x),$$

$$y = u^v, \quad y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.$$

Si $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$, donde f y φ son funciones recíprocamente inversas, entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \text{donde } y = f(x).$$

§ 16. REPRESENTACION PARAMÉTRICA DE FUNCION

Consideremos dos ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array} \right\} \quad (1)$$

donde t toma valores comprendidos en el segmento $[T_1, T_2]$. A cada valor de t le corresponde los de x y de y (suponemos que φ y ψ son funciones unívocas). Considerando que los valores de x y de y son las coordenadas de un punto en el plano Oxy , a cada valor de t le corresponderá un punto determinado del plano. Este punto describe cierta curva en el plano, cuando t varía de T_1 hasta T_2 . Las ecuaciones (1) se denominan *ecuaciones paramétricas* de esta curva; t toma el nombre de *parámetro* y el método de dar la curva mediante las ecuaciones (1) se llama método *paramétrico*.

Supongamos ahora que la función $x = \varphi(t)$ tenga su inversa $t = \Phi(x)$. Es evidente que y , en este caso, es función de x ;

$$y = \psi[\Phi(x)]. \quad (2)$$

De este modo, las ecuaciones (1) determinan y en función de x y se dice que la función y de x viene representada paraméricamente.

La expresión $y = f(x)$ que muestra como y depende directamente de x , se obtiene eliminando el parámetro t de las ecuaciones (1).

El método paramétrico de dar las curvas se usa ampliamente en mecánica. Si en el plano Oxy se desplaza un punto material y se conocen las leyes del movimiento de sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas,

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

donde el parámetro t es el tiempo, las ecuaciones (1') serán las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del punto en movimiento. Eliminando en estas ecuaciones el parámetro t , obtendremos la ecuación de la trayectoria en la forma $y = f(x)$ o en la forma $F(x, y) = 0$.

Ilustremos esto.

Problema. Hállese la trayectoria y el punto de caída de un cuerpo arrojado desde un avión que se desplaza horizontalmente a la altura y_0 con velocidad v_0 (se puede prescindir de la resistencia del aire).

Solución. Tomemos el sistema de coordenadas que muestra la figura 74. Suponemos que el cuerpo es arrojado en el instante en que el avión cruza el eje Oy . Es evidente que el desplazamiento horizontal del cuerpo será uniforme con la velocidad constante v_0 :

$$x = v_0 t.$$

La caída vertical del cuerpo por efecto de la gravedad se expresa mediante la fórmula:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Por tanto, en cualquier instante, la distancia del cuerpo a la tierra se expresará por la fórmula:

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Las igualdades

$$\begin{aligned} x &= v_0 t, \\ y &= y_0 - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned}$$

son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria. Para eliminar el parámetro t hallamos de la ecuación primera su valor $t = \frac{x}{v_0}$ y hacemos en la segunda

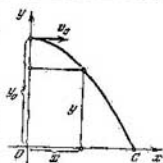


Fig. 74

ecuación la sustitución correspondiente, obteniendo entonces la ecuación de la trayectoria

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Esta es la ecuación de la parábola, cuyo vértice se encuentra en el punto $M(0, y_0)$, sirviéndole Oy de eje de simetría.

Determinemos la magnitud del segmento OC . Designemos por X la abscisa del punto C , cuya ordenada es $y = 0$. Introduciendo estos valores en la fórmula anterior, tendremos:

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} X^2,$$

de donde:

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

§ 17. ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE ALGUNAS CURVAS

Circunferencia. Supongamos una circunferencia de radio r , con centro en el origen de las coordenadas (fig. 75).

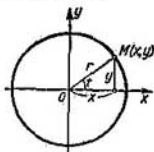


Fig. 75

Designemos con t el ángulo formado por el radio trazado por el punto $M(x, y)$ de la circunferencia y el eje Ox . Entonces, las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia se expresarán por medio del parámetro t como sigue:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos t, \\ y &= r \sin t, \end{aligned} \right\} 0 \leq t < 2\pi.$$

Estas son ecuaciones paramétricas de la circunferencia. Si eliminamos en estas ecuaciones el parámetro t , obtendremos la ecuación de la circunferencia que contiene sólo x e y . Elevando al cuadrado las ecuaciones paramétricas y sumándolas, tenemos:

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t),$$

o sea,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Elipse. Escribamos la ecuación de una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

y hagamos

$$x = a \cos t. \quad (2')$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (1), obtendremos

$$y = b \sin t. \quad (2'')$$

Las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (2)$$

son ecuaciones paramétricas de la elipse.

Aclaremos el significado geométrico del parámetro t . Tracemos dos circunferencias de radios a y b , con centro en el origen de coordenadas (fig. 76). Supongamos que el punto $M(x, y)$ se halla en la elipse y el punto B , que tiene la misma abscisa que el punto M , pertenezca a la circunferencia de mayor radio. Designemos con t el ángulo formado por el radio OB y el eje Ox . De la figura se deduce

$$x = OP = a \cos t \text{ [ecuación (2')],}$$

$$CQ = b \sin t.$$

En virtud de la ecuación (2'') deducimos que $CO = y$, es decir, la recta CM es paralela al eje Ox . Por consiguiente, en las ecuaciones (2), t representa el ángulo formado por el radio OB y el eje de abscisas. A veces el ángulo t se denomina ángulo excéntrico.

Cicloide. Se da el nombre de cicloide a la curva descrita por un punto de la circunferencia, cuando ésta rueda sin resbalar sobre una línea recta (fig. 77). Supongamos que el punto M de la circunferencia coincide, al principio del movimiento, con el origen de coordenadas. Determinemos las coordenadas del punto M después

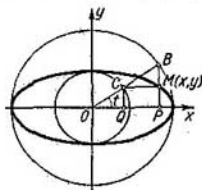


Fig. 76

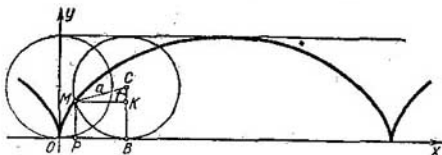


Fig. 77

de haber girado la circunferencia el ángulo t . Designamos por a el radio de la circunferencia en movimiento. Como se ve en la figura 77,

$$x = OP = OB - PB,$$

y teniendo en cuenta que la circunferencia rueda sin resbalar, tenemos:

$$OB = \widehat{MB} = at, \quad PB = MK = a \sin t.$$

Por tanto, $x = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t)$.

Luego,

$$y = MP = KB = CB - CK = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

Las expresiones

$$\left. \begin{aligned} x &= a(t - \operatorname{sen} t), \\ y &= a(1 - \cos t), \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (3)$$

son ecuaciones paramétricas de la cicloide. Cuando t varía de 0 a 2π , el punto M describe un arco de la cicloide.

Eliminando el parámetro t en estas ecuaciones, obtenemos la forma en que x directamente depende de y . En el segmento $0 \leq t \leq \pi$ la función $y = a(1 - \cos t)$ tiene por inversa

$$t = \arccos \frac{a-y}{a}.$$

Sustituyendo t en la primera ecuación del sistema (3) por su expresión, tendremos:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - a \operatorname{sen} \left(\arccos \frac{a-y}{a} \right),$$

ó

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}, \text{ para } 0 \leq x \leq \pi a.$$

De la figura se deduce que, si

$\pi a \leq x \leq 2\pi a$, se tiene:

$$x = 2\pi a - \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \right).$$

Observemos que la función

$$x = a(t - \operatorname{sen} t)$$

tiene su inversa, pero ésta no se expresa mediante funciones elementales. Por eso la función $y = f(x)$ tampoco se expresa mediante funciones elementales.

Observación 1. En el ejemplo de la cicloide se ve que en algunos casos las ecuaciones paramétricas son más cómodas en el análisis de funciones y curvas, que la dependencia directa entre x e y .

Astroide. Se da el nombre de astroide a la curva representada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos^3 t, \\ y &= a \operatorname{sen}^3 t, \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4)$$

Elevando todos los términos de ambos miembros de las dos ecuaciones a la potencia $2/3$ y sumándolas, obtenemos la dependencia entre x e y :

$$\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{a^3} (\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t),$$

o bien,

$$\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{a^3} \quad (5)$$

Más adelante (§ 12, cap. V) demostraremos que dicha curva tiene la forma que se expone en la figura 78. Esta curva puede interpretarse como trayectoria de un punto de la circunferencia de radio $\frac{a}{4}$, que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia de radio a , quedando siempre dentro de la mayor (fig. 78).

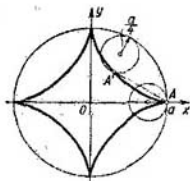


Fig. 78

Observación 2. Señalemos que la función $y = f(x)$ no es la única que se determina por las ecuaciones (4) y (5). Estas ecuaciones determinan en realidad dos funciones continuas en el segmento $-a \leq x \leq +a$, una de las cuales toma valores no negativos y la otra, valores no positivos.

§ 18. DERIVADA DE LA FUNCIÓN DADA PARAMÉTRICAMENTE

Supongamos que la representación paramétrica de la función y de x es

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \right\} t_0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

y que, además, estas funciones tienen derivadas y la función $x = \varphi(t)$ tiene por inversa $t = \Phi(x)$ que, a su vez, también tiene derivada. En este caso, la función $y = f(x)$, definida por las ecuaciones paramétricas, puede ser interpretada como función compuesta:

$$y = \psi(t), \quad t = \Phi(x).$$

Aquí, t es el argumento intermedio.

Según la regla para derivar función compuesta, tenemos

$$y'_x = y'_t x'_t = \psi'_t(t) \Phi'_x(x). \quad (2)$$

Del teorema de derivación de función inversa tenemos:

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Introduciendo esta expresión en la igualdad (2), obtenemos:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

o sea,
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (\text{XXI})$$

Con la fórmula obtenida se puede calcular la derivada, y'_x , de la función dada paramétricamente, sin recurrir a la expresión de la dependencia directa de y en función de x .

Ejemplo 1. La función y de x está dada por ecuaciones paramétricas

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t, \end{aligned} \right\} (0 \leq t \leq \pi).$$

Calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$:

1) para cualquier valor de t ;

2) para $t = \frac{\pi}{4}$.

Solución.

$$1) y'_x = \frac{(a \sin t)'}{(a \cos t)'} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\cotg t;$$

$$2) (y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\cotg \frac{\pi}{4} = -1.$$

Ejemplo 2. Hallar el coeficiente angular de la línea tangente a la cicloide,

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

en un punto arbitrario ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Solución. El coeficiente angular de la tangente en cada punto es igual al valor de la derivada y'_x en este punto, es decir,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Pero

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t,$$

y, por tanto,

$$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \cotg \frac{t}{2} = \tg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Por consiguiente, el coeficiente angular de la línea tangente a la cicloide en cada uno de sus puntos es igual a $\tg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$, donde t es el valor del parámetro correspondiente a este punto. Esto último significa que el ángulo α de inclinación de la línea tangente con respecto al eje x es igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ (para los valores de t situados entre $-\pi$ y π)*).

*) En efecto, el coeficiente angular es igual a $\tg \alpha$, donde α es el ángulo

§ 19. FUNCIONES HIPERBOLICAS

En muchas aplicaciones del análisis matemático se encuentran combinaciones de las funciones exponenciales del tipo $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ y $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Estas combinaciones se consideran como funciones nuevas y se designan:

$$\left. \begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

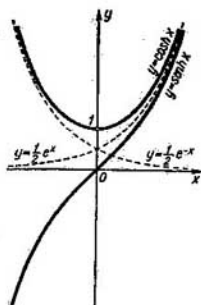


Fig. 79

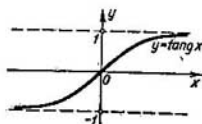


Fig. 80

La primera de estas funciones (1) se denomina *seno hiperbólico* y la segunda, *coseno hiperbólico*. Con estas funciones se pueden definir dos funciones más; $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ y $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$, es decir,

$$\left. \begin{aligned} \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & \text{tangente hiperbólica} \\ \coth x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, & \text{cotangente hiperbólica.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

de inclinación de la línea tangente respecto al eje Ox . De aquí $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$ y $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ en aquellos valores de t , para los cuales $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ se halla entre 0 y π .

Las funciones $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ tienen por dominio, evidentemente, todos los valores de x . La función $\coth x$ tiene el mismo dominio, a excepción del punto $x = 0$.

Las gráficas de las funciones hiperbólicas están representadas en las figuras 79, 80, 81.

De la definición de las funciones $\sinh x$ y $\cosh x$ [fórmulas (1)] se deducen correlaciones análogas a las conocidas entre las funciones trigonométricas correspondientes:

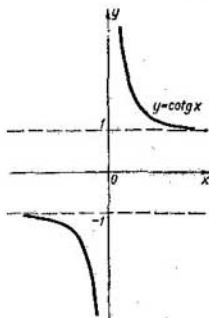


Fig. 81

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad (2)$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b, \quad (3)$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b. \quad (3')$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Considerando que

$$\cosh(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b &= \\ &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \cosh(a+b). \end{aligned}$$

Del mismo modo se demuestra la fórmula (3').

El nombre «función hiperbólica» se debe a que las funciones $\sinh t$ y $\cosh t$ desempeñan en la representación paramétrica de la hipérbola,

$$x^2 - y^2 = 1,$$

el mismo papel que las funciones trigonométricas $\sin t$ y $\cos t$ en la representación paramétrica de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 1.$$

En efecto, eliminando el parámetro t en las ecuaciones

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

obtendremos:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

ó

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (ecuación de la circunferencia).}$$

Análogamente,

$$x = \cosh t,$$

$$y = \sinh t$$

son ecuaciones paramétricas de la hipérbola.

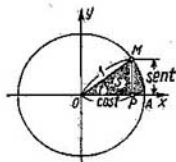


Fig. 82

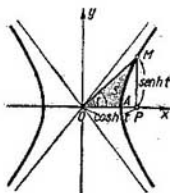


Fig. 83

En efecto, elevando al cuadrado estas ecuaciones y restando la segunda de la primera, obtendremos:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t.$$

Ya que la expresión del segundo miembro, según la (2), es igual a la unidad, tenemos:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

que es la ecuación de una hipérbola.

Examinemos la circunferencia, dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 82). En las ecuaciones $x = \cos t$, $y = \sin t$, el parámetro t equivale numéricamente al ángulo central AOM o al área doble S del sector AOM, ya que $t = 2S$.

Señalemos sin demostración que en las ecuaciones paramétricas de la hipérbola

$$\begin{aligned}x &= \cosh t, \\y &= \sinh t\end{aligned}$$

el parámetro t es también numéricamente igual al área doble del «sector hiperbólico» AOM (fig. 83).

Las derivadas de las funciones hiperbólicas se determinan por las fórmulas:

$$\left. \begin{aligned}(\sinh x)' &= \cosh x, & (\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x}, \\(\cosh x)' &= \sinh x, & (\coth x)' &= -\frac{1}{\sinh^2 x},\end{aligned} \right\} \quad (\text{XXII})$$

que se obtienen de la propia definición de función hiperbólica; por ejemplo, para la función $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, se tiene:

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

§ 20. DIFERENCIAL

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable sobre el segmento $[a, b]$. En un punto x del segmento $[a, b]$ la derivada de esta función se determina por la igualdad

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a un número determinado $f'(x)$ y, por tanto, se diferencia de la derivada $f'(x)$ en una magnitud infinitamente pequeña:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

donde $\alpha \rightarrow 0$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Multiplicando todos los términos de la última igualdad por Δx , obtenemos:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x. \quad (1)$$

Dado que en el caso general $f'(x) \neq 0$, entonces, cuando x es constante y $\Delta x \rightarrow 0$, el producto $f'(x) \Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña de primer orden respecto a Δx . El producto $\alpha \Delta x$

es siempre una magnitud infinitamente pequeña de orden superior a Δx , ya que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Así, pues, el incremento Δy de la función se compone de dos sumandos, de los cuales el primero recibe el nombre [cuando $f'(x) \neq 0$] de *parte principal* del incremento, que es *lineal* con relación a Δx . El producto $f'(x) \Delta x$ se denomina *diferencial* de la función y se designa por dy o $df(x)$.

De modo que, si la función $y = f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ en el punto x , el producto de ésta por el incremento Δx , del argumento se llama *diferencial* de la función y se designa con el símbolo dy , o sea,

$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (2)$$

Halleemos la diferencial de la función $y = x$. En este caso

$$y' = (x)' = 1,$$

y, por tanto, $dy = dx = \Delta x$ o $dx = \Delta x$. De este modo, la *diferencial* dx de la variable independiente x coincide con su incremento Δx . La igualdad $dx = \Delta x$ podría ser considerada como definición de la diferencial de una variable independiente, y, en este caso, el ejemplo examinado demostraría que ello no contradice a la definición de diferencial de la función. En cualquier caso la fórmula (2) se puede escribir así:

$$dy = f'(x) dx.$$

Pero de esta correlación se desprende que

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto, la derivada $f'(x)$ puede ser considerada como razón de la diferencial de la función respecto a la diferencial de la variable independiente.

Teniendo en cuenta la fórmula (2), escribamos la fórmula (1) así:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x. \quad (3)$$

Así, pues, el incremento de la función difiere de la diferencial de ésta en una magnitud infinitamente pequeña, de orden superior respecto a Δx . Si $f'(x) \neq 0$, $\alpha \Delta x$ es una infinitesimal de orden superior también respecto a dy , y, por tanto:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \Delta x}{f'(y) \Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Esto nos permite, a veces, utilizar en los cálculos aproximados la igualdad aproximada

$$\Delta y \approx dy, \quad (4)$$

o, en su forma desarrollada,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x, \quad (5)$$

con lo cual se abrevian los cálculos.

Ejemplo 1. Calcular la diferencial dy y el incremento Δy de la función $y = x^2$:

- 1) para valores arbitrarios de x y Δx ,
- 2) para valores $x = 20$, $\Delta x = 0,1$.

Solución: 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$,
 $dy = (x^2)' \Delta x = 2x\Delta x$.

- 2) Si $x = 20$ y $\Delta x = 0,1$ entonces:

$$\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 + (0,1)^2 = 4,01,$$

$$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0,1 = 4,00.$$

El error que resulta de la sustitución de Δy por dy es igual a 0,01. En muchos casos se le puede despreciar, por considerarlo pequeño en comparación con $\Delta y = 4,01$.

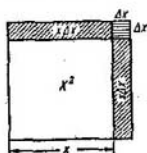


Fig. 84

El problema examinado se ilustra en la figura 84. En cálculos aproximados se usa también la igualdad aproximada que se obtiene de la ecuación (5):

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x. \quad (6)$$

Ejemplo 2. Supongamos $f(x) = \sin x$. Entonces,
 $f'(x) = \cos x$.

En este caso, la igualdad aproximada (6) tomará la forma

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x. \quad (7)$$

Calculemos el valor aproximado de $\sin 46^\circ$. Haciendo $x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$, tenemos

$$\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180},$$

$$46^\circ = 45^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}.$$

Introduciendo en (7) los valores calculados, obtenemos

$$\sin 46^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{180},$$

o sea,

$$\sin 46^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{180} = 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,017 = 0,7194.$$

Ejemplo 3. Si en la fórmula (7) hacemos $x=0$ y $\Delta x=\alpha$, obtendremos la siguiente igualdad aproximada:

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha.$$

Ejemplo 4. Si $f(x)=\operatorname{tg} x$, según la fórmula (6), obtenemos la siguiente igualdad aproximada:

$$\operatorname{tg}(x+\Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} \Delta x,$$

cuando $x=0$ y $\Delta x=\alpha$, obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha.$$

Ejemplo 5. Si $f(x)=\sqrt{x}$, la fórmula (6), nos da:

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x.$$

Haciendo $x=1$ y $\Delta x=\alpha$, obtenemos la igualdad aproximada:

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha.$$

El cálculo de la diferencial de una función se reduce en realidad al cálculo de la derivada, ya que, al multiplicar la última por la diferencial de argumento, se obtiene la diferencial de la función. Por tanto, la mayoría de los teoremas y fórmulas que se refieren a las derivadas, siguen siendo válidos también para las diferenciales. Por ejemplo:

La diferencial de la suma de dos funciones derivables u y v es igual a la suma de las diferenciales de estas funciones:

$$d(u+v) = du + dv.$$

La diferencial del producto de dos funciones derivables u y v se determina por la fórmula $d(uv) = u dv + v du$. Demostremos esta última fórmula. Si $y = uv$, se tiene:

$$dy = y' dx = (uv' + vu') dx = uv' dx + vu' dx,$$

pero

$$v' dx = dv, \quad u' dx = du,$$

luego,

$$dy = u dv + v du.$$

Del mismo modo se demuestran las otras fórmulas; por ejemplo, la que determina la diferencial de un cociente:

$$\text{si } y = \frac{u}{v}, \text{ se tiene } dy = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Veamos algunos ejemplos de cálculo de la diferencial de una función.

Ejemplo 6. $y = \operatorname{tg}^2 x$, $dy = 2 \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

Ejemplo 7. $y = \sqrt{1 + \ln x}$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln x}} \frac{1}{x} dx$.

Hallar la expresión de la diferencial de una función compuesta. Supongamos

$$y = f(u), u = \varphi(x), \text{ o } y = f[\varphi(x)].$$

Según la regla de derivación de función compuesta, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = f_u(u) \varphi'(x).$$

Por consiguiente,

$$dy = f_u(u) \varphi'(x) dx,$$

pero $\varphi'(x)dx = du$, luego, $dy = f'(u) du$.

De modo que, la diferencial de una función compuesta tiene la misma forma que ésta tendría en caso de que el argumento intermedio u fuera la variable independiente. En otras palabras, la forma de la diferencial no depende de que el argumento de la función sea variable independiente o sea función de otro argumento. Esta importante propiedad de la diferencial, que se conoce por invariancia de la forma de la diferencial, la usaremos con frecuencia en lo sucesivo.

Ejemplo 8. Sea la función $y = \operatorname{sen} \sqrt{x}$, hallar dy .

Solución. Interpretando esta función como función compuesta, se tiene:

$$y = \operatorname{sen} u, \quad u = \sqrt{x},$$

de donde

$$dy = \cos u \frac{1}{2\sqrt{x}} dx;$$

pero como $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$, se puede escribir:

$$dy = \cos u du \quad \text{ó} \quad dy = \cos(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}).$$

§ 21. SIGNIFICADO GEOMETRICO DE LA DIFERENCIAL

Examinemos la función

$$y = f(x)$$

y su correspondiente curva (fig. 85).

Tomemos en la curva $y = f(x)$ un punto arbitrario $M(x, y)$, tracemos una tangente a la curva en este punto y designemos por α el ángulo* formado por la tangente y la dirección positiva del

*) Suponiendo que la función $f(x)$ tenga derivada finita en el punto x , entonces $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

eje Ox . Demos a la variable independiente un incremento Δx ; entonces la función recibirá el incremento $\Delta y = NM_1$. A los valores $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ corresponderá en la curva $y = f(x)$ el punto $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

En el triángulo MNT encontramos:

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha.$$

Como

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x), \quad MN = \Delta x,$$

tenemos

$$NT = f'(x) \Delta x.$$

Pero, según la definición de diferencial, $f'(x) \Delta x = dy$.

Entonces, $NT = dy$.

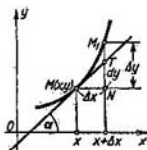


Fig. 85

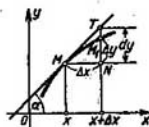


Fig. 86

Esta igualdad significa que la diferencial de la función $f(x)$, correspondiente a los valores dados de x y Δx , es igual al incremento de la ordenada de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto dado x .

En la figura 85 se ve que

$$M_1T = \Delta y - dy.$$

Según lo demostrado antes, $\frac{M_1T}{NT} \rightarrow 0$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

No siempre Δy es mayor que dy .

Así, como se deduce de la fig. 86,

$$\Delta y = M_1N, \quad dy = NT, \quad \text{es decir, } \Delta y < dy.$$

§ 22. DERIVADAS DE DIVERSOS ORDENES

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable en un segmento $[a, b]$. Los valores de la derivada $f'(x)$ dependen de x , es decir, la derivada $f'(x)$ también es función de x . Derivando esta última función, obtendremos la llamada segunda derivada de la función $f(x)$.

La derivada de la primera derivada se denomina derivada de segundo orden o segunda derivada de la función primitiva y se designa

por el símbolo y'' o $f''(x)$:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Por ejemplo, si $y = x^5$, se tiene

$$y' = 5x^4; y'' = (5x^4)' = 20x^3.$$

La derivada de la segunda derivada se denomina *derivada de tercer orden* o *tercera derivada* y se designa por y''' , o sea, $f'''(x)$.

En general, la derivada (de primer orden) de la derivada del orden $(n-1)$ se denomina *derivada de n -ésimo orden de la función $f(x)$* y se designa por el símbolo $y^{(n)}$ o $f^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

(El orden de la derivada se pone entre paréntesis para no confundirlo con un exponente de potencia).

Las derivadas de cuarto, quinto, sexto, etc. órdenes pueden designarse también por cifras romanas: y^{IV} , y^V , y^{VI} , ... En este caso el orden de la derivada se puede escribir sin paréntesis. Por ejemplo, si $y = x^5$, se tiene:

$$y' = 5x^4, y'' = 20x^3, y''' = 60x^2, y^{IV} = y^{(4)} = 120x, y^V = y^{(5)} = 120, y^{(6)} = y^{(7)} = \dots = 0.$$

Ejemplo 1. Sea la función $y = e^{kx}$ ($k = \text{const.}$). Hallar la expresión general de su derivada de orden n .

Solución. $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

Ejemplo 2. Sea la función $y = \sin x$. Hallar $y^{(n)}$.

Solución.

$$y' = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin \left(x + 2 \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin \left(x + 3 \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y^{IV} = \sin x = \sin \left(x + 4 \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y^{(n)} = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

Del mismo modo se obtienen las fórmulas de las derivadas de cualquier orden de otras funciones elementales.

Obtenga Vd., como ejercicio práctico, las fórmulas de las derivadas de n -ésimo orden de las funciones $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \ln x$.

Las reglas indicadas en los teoremas 2 y 3, § 7, se pueden generalizar para cualquier orden de derivadas.

En el caso dado, son evidentes las fórmulas:

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$$

Demostremos la fórmula (llamada de Leibniz) para calcular la derivada de n -ésimo orden del producto de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$. Para obtener esta fórmula, hallemos primero varias derivadas consecutivas y establezcamos después la ley general aplicable para el cálculo de una derivada de cualquier orden:

$$y = uv,$$

$$y' = u'v + uv',$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = \\ = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

$$y^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}.$$

Se ve que la ley de la obtención de las derivadas es válida para derivadas de cualquier orden y es como sigue.

Se desarrolla la expresión $(u+v)^n$ por la fórmula del binomio de Newton y en la serie obtenida se sustituyen los exponentes de u y v por los índices del orden de las derivadas; además, los exponentes cero ($u^0 = v^0 = 1$) que entran en los términos extremos del desarrollo, se sustituyen por las propias funciones (es decir, por las «derivadas del orden cero»):

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}.$$

Es decir, hemos obtenido la fórmula de Leibniz.

En rigor, se pudo llegar también a esta fórmula por el método de inducción matemática completa (es decir, demostrar de que, siendo válida la fórmula para el n -ésimo orden, es válida también para el orden $n+1$).

Ejemplo 3. Dada la función $y = e^{ax}x^2$. Hallar la derivada $y^{(n)}$.

Solución.

$$u = e^{ax}, \quad v = x^2,$$

$$u' = ae^{ax}, \quad v' = 2x,$$

$$u'' = a^2e^{ax}, \quad v'' = 2,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$u^{(n)} = a^ne^{ax}, \quad v^{(n)} = v^{IV} = \dots = 0,$$

$$y^{(n)} = a^ne^{ax}x^2 + na^{n-1}e^{ax} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}e^{ax} \cdot 2,$$

es decir,

$$y^{(n)} = e^{ax} [a^n x^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}].$$

§ 23. DIFERENCIALES DE DIVERSOS ORDENES

Supongamos la función $y = f(x)$, donde x es una variable independiente. La diferencial de esta función,

$$dy = f'(x) dx,$$

es cierta función de x . Pero de x puede depender sólo el primer factor $f'(x)$, puesto que el segundo, (dx) es un incremento de la variable independiente x que no depende del valor de ésta. Como dy es función de x , se puede hablar de la diferencial de esta función.

La diferencial de la diferencial de una función se denomina *segunda diferencial* o *diferencial de segundo orden* de esta función y se designa por d^2y :

$$d(dy) = d^2y.$$

Halleemos la expresión de la segunda diferencial. En virtud de la definición general de diferencial, tenemos:

$$d^2y = [f'(x) dx]' dx.$$

Puesto que dx es independiente de x , al derivar, dx se escribe fuera del signo de la derivada. Así, tendremos

$$d^2y = f''(x) (dx)^2.$$

En la potencia de la diferencial se omite el paréntesis. Por ejemplo, en lugar de $(dx)^2$ se escribe dx^2 , sobreentendiéndose que se trata del cuadrado de la expresión dx ; $(dx)^3$ se escribirá dx^3 y así sucesivamente.

Se llama *tercera diferencial* o *diferencial de tercer orden* de una función a la diferencial de la segunda diferencial de esta función:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x) dx^2]' dx = f'''(x) dx^3.$$

En general, se llama *diferencial de n -ésimo orden* a la primera diferencial de la diferencial del orden $(n-1)$,

$$\begin{aligned} d^n y &= d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x) dx^{n-1}]' dx, \\ d^n y &= f^{(n)}(x) dx^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Sirviéndonos de las diferenciales de diversos órdenes, la derivada de un orden cualquiera puede ser expresada como la razón de las diferenciales del orden correspondiente:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (2)$$

Conviene anotar, sin embargo, que las igualdades (1) y (2) (para $n > 1$) son válidas sólo en el caso de que x sea una variable independiente*).

§ 24. DERIVADAS DE DIVERSOS ORDENES DE FUNCIONES IMPLÍCITAS Y DE FUNCIONES REPRESENTADAS PARAMETRICAMENTE

1. Veamos con un ejemplo el método para obtener las derivadas de diversos órdenes de las funciones implícitas.

Supongamos que la función implícita y de x viene determinada por la igualdad

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (1)$$

Derivando respecto a x todos los términos de esta igualdad y teniendo en cuenta que y es función de x , resulta:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0;$$

de aquí hallamos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad (2)$$

Volvamos a derivar la última igualdad respecto a x (teniendo en cuenta que y es función de x):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2 y - x \frac{dy}{dx}}{a^2 y^2}.$$

Sustituyendo aquí la derivada $\frac{dy}{dx}$ por su expresión en la igualdad (2), se obtiene:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2 y + x \frac{b^2 x}{a^2 y}}{a^2 y^2},$$

*) Sin embargo, la igualdad (2) la escribiremos también en el caso en que x no sea variable independiente, pero entonces, las expresiones $\frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ se deben considerar como representación simbólica de las derivadas.

y simplificando:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

De la ecuación (1) se deduce

$$a^2y^3 + b^2x^3 = a^2b^3,$$

luego, la segunda derivada puede ser presentada en la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Derivando la última igualdad respecto a x , hallamos $\frac{d^3y}{dx^3}$ y así sucesivamente.

2. Veamos ahora el modo de hallar las derivadas de órdenes superiores de la función representada paramétricamente.

Supongamos que la función y de x viene dada paramétricamente por

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array} \right\} \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

y la función $x = \varphi(t)$ en el segmento $[t_0, T]$ tiene su inversa, $t = \Phi(x)$.

Se ha demostrado en el § 18 que en este caso la derivada $\frac{dy}{dx}$ se determina por la igualdad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \quad (4)$$

Para hallar la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ derivemos respecto a x la igualdad (4), teniendo en cuenta que t es función de x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) \frac{dt}{dx}, \quad (5)$$

pero

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Introduciendo las últimas expresiones en la fórmula (5), obtendremos:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}.$$

Esta fórmula se puede escribir en forma compacta así:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t) \psi''(t) - \psi'(t) \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

De la misma manera se puede hallar las derivadas

$$\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \text{ etc.}$$

Ejemplo. Sea la función y de x , cuya representación paramétrica es
 $x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$

hallar las derivadas $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$.

Solución.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t; \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -a \cos t;$$

$$\frac{dy}{dt} = b \cos t; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \sin t;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cotg t;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-a \sin t)(-b \sin t) - (b \cos t)(-a \cos t)}{(-a \sin t)^3} = -\frac{b}{a^2} \frac{1}{\sin^3 t}.$$

§ 25. INTERPRETACION MECANICA DE LA SEGUNDA DERIVADA

El espacio s recorrido por un cuerpo en movimiento de traslación en función del tiempo t , se expresa así:

$$s = f(t). \quad (1)$$

Como es sabido (§ 1, cap. III), la velocidad v del cuerpo en un instante dado es igual a la primera derivada del espacio recorrido respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2)$$

Supongamos que en cierto instante t la velocidad del cuerpo era v . Si el movimiento no es uniforme, en el intervalo de tiempo Δt a partir de t , la velocidad variará, recibiendo el incremento Δv .

Se denomina *aceleración media* en el tiempo Δt la razón del incremento de la velocidad Δv respecto al del tiempo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Se denomina *aceleración en un instante dado* el límite de la razón del incremento de la velocidad respecto al del tiempo, cuando éste tiende a cero

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t};$$

es decir, la aceleración (en el instante dado) es igual a la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

pero como $v = \frac{ds}{dt}$, se tiene, por consiguiente:

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

o sea que la *aceleración del movimiento rectilíneo es igual a la segunda derivada del espacio recorrido respecto al tiempo*. De la igualdad (1) tenemos

$$a = f''(t).$$

Ejemplo. Hallar la velocidad v y la aceleración a de un cuerpo que cae libremente en el espacio por efecto de la gravedad, si el espacio recorrido s depende del tiempo t , según la siguiente fórmula:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \quad (3)$$

donde $g = 9,8 \text{ m/seg}^2$ es la aceleración de la gravedad

y $s_0 = s_{t=0}$, el valor de s , cuando $t = 0$.

Solución. Derivando, hallamos:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + v_0. \quad (4)$$

De esta fórmula se deduce $v_0 = (v)_{t=0}$.

Derivando una vez más, hallamos:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

Recíprocamente, si la aceleración de cierto movimiento permanece constante y es igual a g , la velocidad se expresará por la igualdad (4), y el espacio recorrido por la (3), a condición de que $(v)_{t=0} = v_0$ y $(s)_{t=0} = s_0$.

§ 26. ECUACIONES DE LA LÍNEA TANGENTE Y DE LA NORMAL. LONGITUDES DE LA LÍNEA SUBTANGENTE Y DE LA SUBNORMAL

Sea una curva cuya ecuación es

$$y = f(x).$$

Tomemos en esta curva un punto $M(x_1, y_1)$ (fig. 87) y escribamos la ecuación de la tangente a la curva dada en el punto M , suponiendo que esta tangente no sea paralela al eje de ordenadas.

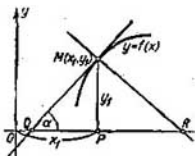


Fig. 87

La ecuación de una recta, del coeficiente angular k , que pasa por el punto M , es de la forma

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

En el caso de la tangente (§ 3),

$$k = f'(x_1).$$

Por tanto, la ecuación de la tangente será:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Conjuntamente con la tangente a la curva en el punto dado, surge con frecuencia la necesidad de estudiar la normal.

Definición. Se denomina *normal* a la curva en un punto dado, a la recta que, pasando por éste, es perpendicular a la tangente trazada por el mismo punto.

De la definición de normal se deduce que su coeficiente angular k_n está relacionado con el coeficiente angular k_t de la tangente de la manera siguiente:

$$k_n = -\frac{1}{k_t}.$$

es decir,

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Por tanto, la ecuación de la normal a la curva $y = f(x)$ en el punto $M(x_1, y_1)$ tiene la forma

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Ejemplo 1. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3$, en el punto $M(1, 1)$.

Solución. Puesto que $y' = 3x^2$, el coeficiente angular de la tangente es igual a $(y')_{x=1} = 3$. Por consiguiente, la ecuación de la tangente será

$$y - 1 = 3(x - 1) \text{ ó } y = 3x - 2.$$

La ecuación de la normal es:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

o sea,

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(fig. 88).

La longitud T del segmento de la tangente QM (fig. 87) comprendido entre el punto de tangencia y el eje Ox se denomina *longitud de la tangente*. La proyección del segmento indicado sobre el eje Ox , es decir, el segmento QP , se llama *subtangente* y su longitud se designa por S_T . La longitud N del segmento MR se llama *longitud de la normal* y la proyección RP del segmento RM sobre el eje Ox toma el nombre de *subnormal* y su longitud se designa por S_N .

Hallemos los valores T , S_T , N , S_N para la curva $y = f(x)$ y el punto $M(x_1, y_1)$.

En la figura 87 podemos observar que

$$QP = y_1 \cotg \alpha = \frac{y_1}{\tg \alpha} = \frac{y_1}{y'_1},$$

por tanto,

$$S_T = \left| \frac{y_1}{y'_1} \right|;$$

$$T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y_1'^2}} = \left| \frac{y_1}{y'_1} \sqrt{y_1'^2 + 1} \right|.$$

al mismo tiempo esta figura muestra que

$$PR = y_1 \tg \alpha = y_1 y'_1,$$

y entonces

$$S_N = |y_1 y'_1|.$$

$$N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y'_1)^2} = |y_1 \sqrt{1 + y_1'^2}|.$$

Las fórmulas indicadas han sido obtenidas en el supuesto de que $y_1 > 0$, $y'_1 > 0$. Sin embargo, son válidas, también, para un caso cualquiera.

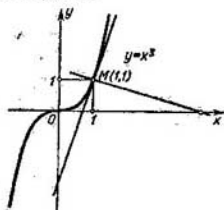


Fig. 88

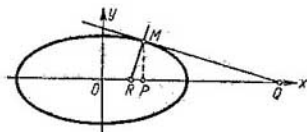


Fig. 89

Ejemplo 2. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal y las longitudes de la tangente, subtangente, normal y subnormal de la elipse:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (1)$$

en el punto $M(x_1, y_1)$, en el cual $t = \frac{\pi}{4}$ (fig. 89).

Solución. De las ecuaciones (1) deducimos

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t; \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cotg t; \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

Hallemos ahora las coordenadas del punto de tangencia M :

$$x_1 = (x)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = (y)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Ecuación de la tangente: $y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$, o sea, $bx + ay - ab\sqrt{2} = 0$.

Ecuación de la normal:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}} \right), \text{ o sea, } (ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0.$$

Longitudes de la subtangente y de la subnormal:

$$S_T = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \right| = \frac{a}{\sqrt{2}}; \quad S_N = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Longitudes de la tangente y de la normal:

$$T = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$N = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2} \right| = \frac{b}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

§ 27. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA DEL RADIO VECTOR RESPECTO AL ANGULO POLAR

Supongamos que tenemos una curva cuya ecuación en coordenadas polares es

$$\rho = f(\theta). \quad (1)$$

Escribamos las fórmulas para transformar las coordenadas polares en cartesianas:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Sustituyendo ρ en estas ecuaciones por su expresión mediante θ en la ecuación (1), tendremos:

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta. \quad (2)$$

Las ecuaciones (2) constituyen la representación paramétrica de la curva dada, sirviendo de parámetro el ángulo polar θ (fig. 90).

Designando por φ el ángulo formado por la tangente a la curva en cierto punto $M(\rho, \theta)$ con la dirección positiva del eje de abscisas,

tendremos

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}, \quad \text{o sea,} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta}{\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta}. \quad (3)$$

Designemos por μ el ángulo formado por el radio vector y la tangente. Evidentemente, $\mu = \varphi - \theta$

y

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta}.$$

Sustituyendo $\operatorname{tg} \varphi$ por su expresión (3) y haciendo las transformaciones correspondientes, obtenemos:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{(\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta) \cos \theta - (\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) \sin \theta}{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) \cos \theta + (\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta) \sin \theta} = \frac{\rho}{\rho'},$$

o bien

$$\rho' = \rho \cotg \mu. \quad (4)$$

De modo que la derivada del radio vector respecto al ángulo polar es igual al producto de la longitud del primero por la cotangen-

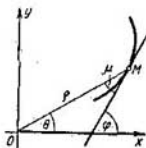


Fig. 90

te del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva en el punto dado.

Ejemplo.

Como ilustración, demostrar que la tangente a la espiral logarítmica $\rho = e^{a\theta}$ forma con el radio vector un ángulo constante.

Solución. De la ecuación de la espiral deducimos: $\rho' = ae^{a\theta}$. En virtud de la fórmula (4), obtenemos:

$$\cotg \mu = \frac{\rho'}{\rho} = a, \quad \text{es decir,} \quad \mu = \operatorname{arccotg} a = \text{const.}$$

Ejercicios para el capítulo III

Partiendo de la definición de derivada, hallar las derivadas de las funciones:

1. $y = x^3$. Respuesta: $3x^2$. 2. $y = \frac{1}{x}$. Respuesta: $-\frac{1}{x^2}$. 3. $y = \sqrt{x}$. Respuesta: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 4. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Respuesta: $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. 5. $y = \sin^2 x$. Respuesta: $2 \sin x \cos x$. 6. $y = 2x^2 - x$. Respuesta: $4x - 1$.

Determinar las tangentes de ángulos de inclinación de las líneas tangentes a las curvas:

7. $y = x^3$. a) Cuando $x = 1$. Respuesta: 3. b) Cuando $x = -1$. Respuesta: 3; construir la gráfica. 8. $y = \frac{1}{x}$. a) Cuando $x = 1/2$. Respuesta: -4. b) Cuando $x = 1$. Respuesta: -1; construir la gráfica. 9. $y = \sqrt{x}$ cuando $x = 2$. Respuesta: $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Hallar las derivadas de las funciones:

10. $y = x^4 + 3x^2 - 6$. Respuesta: $y' = 4x^3 + 6x$. 11. $y = 6x^3 - x^2$. Respuesta: $y' = 18x^2 - 2x$. 12. $y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x^2}{a-b} - x$. Respuesta: $y' = \frac{5x^4}{a+b} - \frac{2x}{a-b} - 1$. 13. $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$. Respuesta: $y' = \frac{3x^2 - 2x}{5}$. 14. $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b} + c$. Respuesta: $y' = 6ax^2 - \frac{2x}{b}$. 15. $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x$. Respuesta: $y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 2$. 16. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$. Respuesta: $y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$. 17. $y = \frac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$.

- Respuesta: $y' = \frac{3(x+1)^2(x-1)}{5x^{\frac{5}{2}}}$. 18. $y = \frac{x}{m} + \frac{m}{x} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{n^2}{x^2}$. Respuesta:

$$y' = \frac{1}{m} - \frac{m}{x^2} + \frac{2x}{n^2} - \frac{2n^2}{x^3}$$

19. $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5$. Respuesta: $y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. 20. $y = \frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{b}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. Respuesta: $y' = \frac{5}{3} ax^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} bx^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{6} x^{-\frac{7}{6}}$.

21. $y = (1 + 4x^2)(1 + 2x^2)$. Respuesta: $y' = 4x(1 + 3x + 10x^3)$. 22. $y = x(2x - 1)(3x + 2)$. Respuesta: $y' = 2(9x^2 + x - 1)$.

23. $y = (2x - 1)(x^2 - 6x + 3)$. Resp. $y' = 6x^2 - 28x + 12$. 24. $y = \frac{2x^4}{b^2 - x^2}$. Resp.

$$y' = \frac{4x^3(2b^2 - x^2)}{(b^2 - x^2)^2}$$

25. $y = \frac{a-x}{a+x}$. Resp. $y' = -\frac{2a}{(a+x)^2}$. 26. $f(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$. Resp. $f'(t) = \frac{t^3(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$. 27. $f(s) = \frac{(s+4)^3}{s+3}$. Resp. $f'(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$.

28. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$. Resp. $y' = \frac{x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x - 2)^2}$. 29. $y = \frac{x^m}{x^m - a^m}$. Resp.

- $y' = \frac{x^{p-1}[(p-m)x^m - pa^m]}{(x^m - a^m)^2}$. 30. $y = (2x^2 - 3)^2$. Resp. $y' = 8x(2x^2 - 3)$.
 31. $y = (x^2 + a^2)^3$. Resp. $y' = 10x(x^2 + a^2)^4$. 32. $y = \sqrt{x^2 + a^2}$. Resp. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. 33. $y = (a+x)\sqrt{a-x}$. Resp. $y' = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. 34. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
 Resp. $y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. 35. $y = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. Resp. $y' = \frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.
 36. $y = \sqrt[3]{x^2+x+1}$. Resp. $y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. 37. $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$. Resp. $y' = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$. 38. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$. Resp. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \times$
 $\times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\right) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. 39. $y = \sin^2 x$. Resp. $y' = \sin 2x$.
 40. $y = 2 \sin x + \cos 3x$. Resp. $y' = 2 \cos x - 3 \sin 3x$. 41. $y = \operatorname{tg}(ax+b)$. Resp. $y' = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$. 42. $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$. Resp. $y' = \frac{1}{1+\cos x}$. 43. $y = \sin 2x \cos 3x$.
 Resp. $y' = 2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x$. 44. $y = \cot^2 5x$. Resp. $y' = -10 \cot 5x \csc^2 5x$. 45. $y = t \sin t + \cos t$. Resp. $y' = t \cos t$. 46. $y = \sin^2 t \cos t$.
 Resp. $y' = \sin^2 t (3 \cos^2 t - \sin^2 t)$. 47. $y = a \sqrt{\cos 2x}$. Resp. $y' = -\frac{a \sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.
 48. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$. Resp. $r'_{\varphi} = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$. 49. $y = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cotg \frac{x}{2}}{x}$. Resp. $y' =$
 $= -\frac{2x \cos x + \sin^2 x \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cotg \frac{x}{2}\right)}{x^2 \sin^2 x}$. 50. $y = a \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right)^3$. Resp. $y' =$
 $= 2a \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. 51. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$. Resp. $y' = \operatorname{tg} x \sec^2 x$. 52. $y = \ln \cos x$.
 Resp. $y' = -\operatorname{tg} x$. 53. $y = \ln \operatorname{tg} x$. Resp. $y' = 2/\sin 2x$. 54. $y = \ln \sin^2 x$. Resp. $y' = 2 \cotg x$. 55. $y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$. Resp. $y' = \sin x + \cos x$. 56. $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.
 Resp. $y' = \frac{1}{\cos x}$. 57. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. Resp. $y' = \frac{1}{\cos x}$. 58. $y =$
 $= \sin(x+a) \cos(x+a)$. Resp. $y' = \cos 2(x+a)$. 59. $f(x) = \sin(\ln x)$. Resp. $f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$. 60. $f(x) = \operatorname{tg}(\ln x)$. Resp. $f'(x) = \frac{\sec^2(\ln x)}{x}$. 61. $f(x) =$
 $= \sin(\cos x)$. Resp. $f'(x) = -\sin x \cos(\cos x)$. 62. $r = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + \varphi$.
 Resp. $\frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{tg}^4 \varphi$. 63. $f(x) = (x \cotg x)^2$. Resp. $f'(x) = 2x \cotg x (\cotg x - x \csc^2 x)$.
 64. $y = \ln(ax+b)$. Resp. $y' = a/(ax+b)$. 65. $y = \log_a(x^2+1)$. Resp. $y' = \frac{2x}{(x^2+1) \ln a}$. 66. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Resp. $y' = \frac{2}{1-x^2}$. 67. $y = \log_3(x^2 - \sin x)$.
 Resp. $y' = \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x) \ln 3}$. 68. $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$. Resp. $y' = \frac{4x}{1-x^4}$. 69. $y =$
 $= \ln(x^3+x)$. Resp. $y' = \frac{2x+1}{x^2+x}$. 70. $y = \ln(x^3-2x+5)$. Resp. $y' = \frac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$.

71. $y = x \ln x$, Resp. $y' = \ln x + 1$. 72. $y = \ln^3 x$, Resp. $y' = \frac{3 \ln^2 x}{x}$. 73. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, Resp. $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 74. $y = \ln(\ln x)$, Resp. $y' = \frac{1}{x \ln x}$.
75. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, Resp. $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. 76. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}+x}$, Resp. $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$. 77. $y = \sqrt{a^2+x^2} - a \ln \frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$, Resp. $y' = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. 78. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$, Resp. $y' = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$. 79. $y = -\frac{\cos x}{2 \sin^3 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, Resp. $y' = \frac{1}{\sin^3 x}$. 80. $y = \frac{\sin x}{2 \cos^3 x}$, Resp. $y' = \frac{1 + \sin^2 x}{2 \cos^3 x}$.
81. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$, Resp. $y' = \operatorname{tg}^3 x$. 82. $y = e^{ax}$, Resp. $y' = ae^{ax}$. 83. $y = e^{4x+5}$, Resp. $y' = 4e^{4x+5}$. 84. $y = a^{x^2}$, Resp. $2xa^{x^2} \ln a$. 85. $y = 7^{x^2+2x}$, Resp. $y' = 2(x+1) 7^{x^2+2x} \ln 7$. 86. $y = e^{a^2-x^2}$, Resp. $y' = -2xe^{a^2-x^2} \ln e$. 87. $y = ae^{\sqrt{x}}$, Resp. $y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$. 88. $r = a^\theta$, Resp. $r' = a^\theta \ln a$. 89. $r = a^{\ln \theta}$, Resp. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{a^{\ln \theta} \ln a}{\theta}$. 90. $y = e^x (1-x^2)$, Resp. $y' = e^x (1-2x-x^2)$.
91. $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$, Resp. $y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. 92. $y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}$, Resp. $y' = \frac{1}{1+e^x}$. 93. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$, Resp. $y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$. 94. $y = e^{\sin x}$, Resp. $y' = e^{\sin x} \cos x$. 95. $y = a^{\operatorname{tg} nx}$, Resp. $y' = na^{\operatorname{tg} nx} \operatorname{sc}^2 nx \ln a$. 96. $y = e^{\cos x} \sin x$, Resp. $y' = e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x)$. 97. $y = e^x \ln \sin x$, Resp. $y' = e^x (\cotg x + \ln \sin x)$. 98. $y = x^n e^{\sin x}$, Resp. $y' = x^{n-1} e^{\sin x} (n + x \cos x)$. 99. $y = x^x$, Resp. $y' = x^x (\ln x + 1)$. 100. $y = x^{\frac{1}{x}}$, Resp. $y' = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1-\ln x}{x^2} \right)$. 101. $y = x \ln x$, Resp. $y' = x \ln x - 1 \ln x^2$. 102. $y = e^{x^x}$, Resp. $y' = e^{x^x} (1 + \ln x) x^x$. 103. $y = (x/n)^{nx}$, Resp. $y' = n \left(\frac{x}{n} \right)^{nx} \left(1 + \ln \frac{x}{n} \right)$. 104. $y = x^{\sin x}$, Resp. $x^{\sin x} \times \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x \right)$. 105. $y = (\sin x)^x$, Resp. $(\sin x)^x (\ln \sin x + x \cotg x)$. 106. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$, Resp. $y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} (1 + \operatorname{sc}^2 x \ln \sin x)$. 107. $y = \operatorname{tg} x \times \frac{1-e^x}{1+e^x}$, Resp. $y' = -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1-e^x}{1+e^x}$. 108. $y = \sin \sqrt{1-2^x}$, Resp. $y' = -\frac{\cos \sqrt{1-2^x}}{2 \sqrt{1-2^x}} 2^x \ln 2$. 109. $y = 10^x \operatorname{tg} x$, Resp. $y' = 10^x \operatorname{tg} x \ln 10 \times \left(\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} \right)$.

- Calcular las derivadas de las funciones siguientes, hallando previamente sus logaritmos.
110. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. Resp. $y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} \right)$.
111. $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. Resp. $y' = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}} \times \left(\frac{3}{x+1} + \frac{3}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} \right)$.
112. $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3 (x+3)^4}$. Resp. $y' = -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4 (x+3)^5}$.
113. $y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[7]{(x-3)^7}}$. Resp. $y' = \frac{-161x^2+480x-271}{60 \sqrt[5]{(x-1)^2} \sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[7]{(x-3)^{10}}}$.
114. $y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. Resp. $y' = \frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
115. $y = x^5 (a+3x)^3 (a-2x)^2$. Resp. $y' = 5x^4 (a+3x)^2 \times (a-2x) (a^2+2ax-12x^2)$.
116. $y = \arcsen \frac{x}{a}$. Resp. $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
117. $y = (\arcsen x)^2$. Resp. $y' = \frac{2 \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$.
118. $y = \operatorname{arctg}(x^2+1)$. Resp. $y' = \frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$.
119. $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$. Resp. $y' = \frac{2}{1+x^2}$.
120. $y = \arccos(x^2)$. Resp. $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$.
121. $y = \frac{\arccos x}{x}$. Resp. $y' = \frac{-(x+\sqrt{1-x^2} \arccos x)}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$.
122. $y = \arcsen \frac{x+1}{\sqrt{2}}$. Resp. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.
123. $y = x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \times \arcsen \frac{x}{a}$. Resp. $y' = 2 \sqrt{a^2-x^2}$.
124. $y = \sqrt{a^2-x^2} + a \arcsen \frac{x}{a}$. Resp. $y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.
125. $u = \operatorname{arctg} \frac{v+a}{1-av}$. Resp. $\frac{du}{dv} = \frac{1}{1+v^2}$.
126. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \times \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt[3]{3}}{1-x^2}$. Resp. $y' = \frac{x^2+1}{x^3+x^2+1}$.
127. $y = x \arcsen x$. Resp. $y' = \arcsen x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
128. $f(x) = \arccos(\ln x)$. Resp. $f'(x) = -\frac{1}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}$.
129. $f(x) = \arcsen \sqrt{\sin x}$. Resp. $f'(x) = \frac{\cos x}{2 \sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$.
130. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ($0 \leq x < \pi$). Resp. $y' = \frac{1}{2}$.
131. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$. Resp. $y' = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$.
132. $y = \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Resp. $y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.
133. $y = x \arcsen x$. Resp. $y' = x \arcsen x \left(\frac{\arcsen x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$.
134. $y = \arcsen(\sin x)$. Resp. $y' = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} +1 & \text{en los cuadrantes 1º y 4º} \\ -1 & \text{en los cuadrantes 2º y 3º} \end{cases}$.
135. $y = \operatorname{arctg} \frac{4 \sin x}{3+5 \cos x}$. Resp. $y' = \frac{4}{5+3 \cos x}$.
136. $y = \operatorname{arctg} \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. Resp. $y' =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2a^3}{x^4 - a^4}. \quad 137. y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \quad \text{Resp. } y' = \frac{x^2}{1-x^4}. \quad 138. y = \\
 &= \frac{3x^2-1}{3x^3} + \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x. \quad \text{Resp. } y' = \frac{x^5+1}{x^6+x^4}. \quad 139. y = \\
 &= \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \quad \text{Resp. } y' = \frac{1}{x^3+1}. \quad 140. y = \\
 &= \ln \frac{1+x\sqrt{2+x^2}}{1-x\sqrt{2+x^2}} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}. \quad \text{Resp. } y' = \frac{4\sqrt{2}}{1+x^4}. \quad 141. y = \\
 &= \arccos \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}. \quad \text{Resp. } -\frac{2n|x|^n}{x(x^{2n}+1)}.
 \end{aligned}$$

Derivación de las funciones implícitas

Hallar $\frac{dy}{dx}$ si:

$$\begin{aligned}
 142. y^3 &= 4px, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}. \quad 143. x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \\
 144. b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}. \quad 145. y^3 - 3y + 2ax = 0, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = \\
 &= \frac{2a}{3(1-y^2)}. \quad 146. x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}. \quad 147. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \\
 &= a^{\frac{2}{3}}, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}. \quad 148. y^2 - 2xy + b^2 = 0, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}. \\
 149. x^3 + y^3 - 3axy &= 0, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}. \quad 150. y = \cos(x+y), \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = \\
 &= -\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{1+\operatorname{sen}(x+y)}. \quad 151. \cos(xy) = x, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y\operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}.
 \end{aligned}$$

Hallar $\frac{dy}{dx}$ de las funciones dadas paramétricamente:

$$\begin{aligned}
 152. x &= a \cos t, y = b \operatorname{sen} t, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cotg t. \quad 153. x = a(t - \operatorname{sen} t); y = \\
 &= a(1 - \cos t), \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = \cotg \frac{t}{2}. \quad 154. x = a \cos^3 t; y = b \operatorname{sen}^3 t, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = \\
 &= -\frac{b}{a} \tg t. \quad 155. x = \frac{3at}{1+t^2}; y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \quad \text{Resp. } \frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1-t^2}. \quad 156. u = \\
 &= 2 \ln \cotg s, v = \tg s + \cotg s. \quad \text{Demostrar que } \frac{du}{dv} = \tg 2s.
 \end{aligned}$$

Hallar las tangentes de los ángulos de inclinación de las líneas tangentes a las curvas:

$$\begin{aligned}
 157. x &= \cos t, y = \operatorname{sen} t \text{ en el punto } x = -\frac{1}{2}, y = \sqrt{3}/2. \quad \text{Construir la gráfica, Respuesta: } 1/\sqrt{3}. \quad 158. x = 2 \cos t, y = \operatorname{sen} t \text{ en el punto } x = 1, y = \\
 &= -\sqrt{3}/2. \quad \text{Construir la gráfica, Respuesta: } \frac{1}{2}\sqrt{3}. \quad 159. x = a(t - \operatorname{sen} t),
 \end{aligned}$$

$y = a(1 - \cos t)$ cuando $t = \pi/2$. Construir la gráfica. Respuesta: 1. 160. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ cuando $t = \frac{\pi}{4}$; Construir la gráfica. Respuesta: —1.

161. Un cuerpo lanzado al espacio, formando con la horizontal un ángulo α , describe en el vacío, por acción de la gravedad, una curva (parábola), cuyas ecuaciones son: $x = v_0 \cos \alpha t$, $y = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}$ ($g = 9,8 \text{ m/seg}^2$). Sabiendo que $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 50 \text{ m/seg}$, determinar la dirección del movimiento, cuando: 1) $t = 2 \text{ seg}$; 2) $t = 7 \text{ seg}$. Construir la gráfica. Respuesta: 1) $\text{tg } \varphi_1 = 0,948$, $\varphi_1 = 43^\circ 30'$; 2) $\text{tg } \varphi_2 = -1,012$, $\varphi_2 = +134^\circ 7'$.

Hallar las diferenciales de las funciones siguientes: 162. $y = (a^2 - x^2)^5$. Respuesta: $dy = -10x(a^2 - x^2)^4 dx$. 163. $y = \sqrt{1+x^2}$. Respuesta: $dy = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 164. $y = \frac{1}{3} \text{tg}^3 x + \text{tg } x$. Respuesta: $dy = \text{sc}^4 x dx$. 165. $y = \frac{x \ln x}{1-x} + \ln(1-x)$. Respuesta: $dy = \frac{\ln x dx}{(1-x)^2}$.

Calcular los incrementos y diferenciales de las funciones:

166. $y = 2x^2 - x$, cuando $x = 1$, $\Delta x = 0,01$. Respuesta: $\Delta y = 0,0302$, $dy = 0,03$.

167. Dada $y = x^3 + 2x$. Hallar Δy y dy , cuando $x = -1$, $\Delta x = 0,02$. Respuesta: $\Delta y = 0,098808$, $dy = 0,1$. 168. Dada $y = \sin x$. Hallar dy , cuando $x = \pi/3$, $\Delta x = \pi/18$. Respuesta: $dy = \frac{\pi}{36} = 0,00873$.

169. Conociendo que $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025$; $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, hallar los valores aproximados de $\sin 60^\circ 3'$ y $\sin 60^\circ 18'$. Comparar los resultados con datos tabulares. Respuesta: $\sin 60^\circ 3' \approx 0,866461$; $\sin 60^\circ 18' \approx 0,868643$.

170. Hallar el valor aproximado de $\text{tg } 45^\circ 4' 30''$. Respuesta: 1,00262. 171. Conociendo que $\log_{10} 200 = 2,30103$, hallar el valor aproximado de $\log_{10} 200,2$. Respuesta: 2,30146.

Derivadas de diversas órdenes 172. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. Hallar y'' .

Resp. $18x - 4$. 173. $y = \sqrt[5]{x^5}$. Hallar y'' . Resp. $\frac{42}{125} x^{-\frac{12}{5}}$. 174. $y = x^6$. Hallar $y^{(6)}$. Resp. $6!$. 175. $y = \frac{C}{x^n}$. Hallar y'' . Resp. $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$. 176. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Hallar y'' . Resp. $-\frac{a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

177. $y = 2\sqrt{x}$. Hallar $J^{(4)}$. Resp. $-\frac{15}{8\sqrt{x^7}}$. 178. $y = ax^2 + bx + c$. Hallar y'' . Resp. 0. 179. $f(x) = \ln(x+1)$. Hallar $f^{IV}(x)$. Resp. $-\frac{6}{(x+1)^3}$. 180. $y = \text{tg } x$. Hallar y'' . Resp. $6 \text{sc}^4 x - 4 \text{sc}^2 x$. 181. $y = \ln \sin x$. Hallar y'' . Resp. $2 \cotg x \csc^3 x$. 182. $f(x) = \sqrt{\text{sc } 2x}$. Hallar $f''(x)$. Resp. $f''(x) = 3[f(x)]^5 - f(x)$. 183. $y = \frac{x^3}{1-x}$. Hallar $f^{IV}(x)$. Resp. $\frac{4!}{(1-x)^5}$. 184. $p = (q^2 + a^2) \arctg \frac{q}{a}$. Hallar $\frac{d^3 p}{dq^3}$. Resp. $\frac{4a^3}{(a^2 + q^2)^2}$.

185. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$. Hallar $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Resp. $\frac{y}{a^2}$. 186. $y = \cos ax$. Hallar $y^{(n)}$. Resp. $a^n \cos(ax + n\pi/2)$. 187. $y = a^x$. Hallar $y^{(n)}$. Resp. $(\ln a)^n a^x$. 188. $y = \ln(1+x)$. Hallar $y^{(n)}$. Resp. $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

189. $y = \frac{1-x}{1+x}$. Hallar $y^{(n)}$. Resp. $2(-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$. 190. $y = e^{x^2}$. Hallar $y^{(n)}$. Resp. $e^{x^2} (x+n)$. 191. $y = x^{n-1} \ln x$. Hallar $y^{(n)}$. Resp. $\frac{(n-1)!}{x}$. 192. $y = \sin^2 x$. Hallar $y^{(n)}$. Resp. $-2^{n-1} \cos(2x + \pi n/2)$. 193. $y = \sin x$. Hallar $y^{(n)}$. Resp. $x \sin(x + \pi n/2) - n \cos(x + \pi n/2)$. 194. Si $y = e^x \sin x$, demostrar que $y'' - 2y' + 2y = 0$. 195. $y^2 = 4ax$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. Resp. $-\frac{4a^2}{y^3}$. 196. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^3y}{dx^3}$. Resp. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$; $-\frac{3b^6x}{a^4y^5}$. 197. $x^2 + y^2 = r^2$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. Resp. $-\frac{r^2}{y^3}$. 198. $y^2 - 2xy = 0$. Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$. Resp. 0. 199. $\rho = \operatorname{tg}(\varphi + \rho)$. Hallar $\frac{d^3\rho}{d\varphi^3}$. Resp. $-\frac{2(5+8\rho^2+3\rho^4)}{\rho^8}$. 200. $\operatorname{sc} \varphi \cdot \cos \rho = C$. Hallar $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$. Resp. $\frac{\operatorname{tg}^2 \rho - \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^5 \rho}$. 201. $e^x + x = e^y + y$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. Resp. $\frac{(1-e^{x+y})(e^x - e^y)}{(e^y + 1)^3}$. 202. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. Resp. $-\frac{2a^3xy}{(y^3 - ax)^3}$. 203. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$. Resp. $-\frac{1}{4a \sin^4 t/2}$. 204. $x = a \cos 2t$, $y = b \sin^2 t$. Demostrar que $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. 205. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$. Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$. Resp. $-\frac{3 \cos t}{a^2 \sin^6 t}$. 206. Demostrar que $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (\sinh x) = \sinh x$; $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} (\sinh x) = \cosh x$.

**Ecuaciones de la tangente y de la normal.
Longitudes de la subtangente y de la subnormal**

207. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ en el punto $M(3, 2)$. Respuesta: tangente $8x - y - 22 = 0$; normal $x + 8y - 19 = 0$.

208. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, las longitudes de la subtangente y subnormal de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto $M(x_1, y_1)$. Respuesta: tangente $xx_1 + yy_1 = r^2$; normal $x_1y - y_1x = 0$;

$$s_T = \left| \frac{y_1^2}{x_1} \right|; s_N = | -x_1 |.$$

209. Demostrar que la subtangente correspondiente a un punto arbitrario de la parábola $y^2 = 4px$ queda dividida por el vértice en dos partes iguales y que la subnormal es constante e igual a $2p$. Construir la gráfica.

210. Hallar la ecuación de la tangente en el punto $M(x_1, y_1)$: a) A la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Respuesta: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$. b) A la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Respuesta: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$. 211. Hallar la ecuación de la tangente

y de la normal a la curva de Agnesi $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ en el punto donde $x = 2a$. Respuesta: tangente $x + 2y = 4a$; normal $y = 2x - 3a$.

212. Demostrar que la normal a la curva $3y = 6x - 5x^3$ trazada en el punto $M\left(1, \frac{1}{3}\right)$ pasa por el origen de las coordenadas.

213. Demostrar que la tangente a la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ en el punto $M(a, b)$ está dada por la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$.

214. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 20x$ que forma con el eje Ox un ángulo de 45° . Respuesta: $y = x + 5$ [en el punto $(5, 10)$].

215. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 52$, paralelas a la recta $2x + 3y = 6$. Respuesta: $2x + 3y \pm 26 = 0$.

216. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$, perpendiculares a la recta $2y + 5x = 10$. Respuesta: no existen tales tangentes.

217. Demostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola $xy = m$, comprendido entre los ejes de coordenadas, se divide por el punto de tangencia en dos partes iguales.

218. Demostrar que el segmento de la tangente a la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, comprendido entre los ejes de coordenadas, tiene longitud constante.

219. Hallar el ángulo α bajo el cual se cortan las curvas $y = a^x$ e $y = b^x$. Respuesta: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\ln a - \ln b}{1 + \ln a \cdot \ln b}$.

220. Hallar las longitudes de la subtangente, subnormal, tangente y normal de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ en el punto en que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Respuesta: $s_T = a$; $s_N = a$; $T = a\sqrt{2}$; $N = a\sqrt{2}$.

221. Hallar los valores s_T , s_N , T y N para la hipocicloide $x = 4a \cos^3 t$, $y = 4a \operatorname{sen}^3 t$. Respuesta: $s_T = -4a \operatorname{sen}^2 t \cos t$; $s_N = -4a \frac{\operatorname{sen}^4 t}{\cos t}$; $T = 4a \operatorname{sen}^2 t$; $N = 4a \operatorname{sen}^2 t \operatorname{tg} t$.

Problemas diversos

Calcular derivadas de las funciones: 222. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$. Resp. $y' = \frac{1}{\cos^3 x}$. 223. $y = \operatorname{arcsen} \frac{1}{x}$. Resp. $y' = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$. 224. $y =$

$= \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$. Resp. $y' = \frac{\cos x}{|\cos x|}$. 225. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$ ($a > 0$, $b > 0$). Resp. $y' = \frac{1}{a + b \cos x}$. 226. $y = |x|$. Resp. $y' = \frac{x}{|x|}$.

227. $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{1 - x^2}$. Resp. $y' = -\frac{x}{|x|} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

228. De las fórmulas para calcular el volumen y la superficie de la esfera $v = \frac{4}{3} \pi r^3$ y $s = 4 \pi r^2$, se deduce que $\frac{dv}{dr} = s$. Explicar el significado geométrico de este resultado. Hallar la correlación análoga entre el área del círculo y la longitud de la circunferencia.

229. En el triángulo ABC el lado a se expresa a través de los otros dos lados b , c y el ángulo A , formado por estos últimos, mediante la fór-

mula $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$. Siendo invariables b y c , a es una función del ángulo A . Demostrar que $\frac{da}{dA} = h_a$, donde h_a es la altura del triángulo que corresponde a la base a . Interpretar el significado geométrico de este resultado.

230. Empleando el concepto de diferencial, interpretar el origen de las fórmulas aproximadas $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2}$, donde $|b|$ es un número pequeño, en comparación con a .

231. El período de oscilaciones de un péndulo es $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. ¿Qué influencia ejerce sobre el error, al calcular el valor del período T , un error del 1% cometido al medir:

1) la longitud del péndulo l ; 2) la aceleración de la fuerza de gravedad g ?

Respuesta: 1) $\approx \frac{1}{2} \%$; 2) $\approx \frac{1}{2} \%$.

232. La tractriz tiene la propiedad de que en cada uno de sus puntos, el segmento de la tangente T es de longitud constante. Demostrar esto,

1) dada la ecuación de la tractriz: $x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}}$ ($a > 0$);

2) dadas las ecuaciones paramétricas

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \operatorname{sen} t.$$

233. Demostrar que la función $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ satisface la ecuación $y'' + 3y' + 2y = 0$ (C_1 y C_2 son constantes).

234. Suponiendo que $y = e^x \operatorname{sen} x$, $z = e^x \cos x$, demostrar que

$$y'' = 2z, \quad z'' = -2y.$$

235. Demostrar que la función $y = \operatorname{sen}(m \operatorname{arcsen} x)$ satisface la ecuación $(1 - x^2)y'' - xy' + m^2 y = 0$.

236. Demostrar que, si $(a = bx) e^{\frac{y}{x}} = x$, se tiene:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^2.$$

TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

§ 1. TEOREMA SOBRE LAS RAICES DE LA DERIVADA (TEOREMA DE ROLLE)

Teorema de Rolle. Si una función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores de éste, reduciéndose a cero en los extremos $x = a$ y $x = b$, [$f(a) = f(b) = 0$], entonces, dentro del segmento $[a, b]$ existe por lo menos un punto, $x = c$, $a < c < b$, en el que la derivada $f'(x)$ se reduce a cero, es decir, $f'(c) = 0^*$.

Demostración. Puesto que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, debe tener en éste su valor máximo M , y su valor mínimo m . Si $M = m$, la función $f(x)$ es constante, es decir, tiene una valor constante $f(x) = m$ para todos los valores de x . Pero, en este caso, en cualquier punto del segmento $f'(x) = 0$ y el teorema queda demostrado. Supongamos ahora que $M \neq m$. Entonces, por lo menos uno de estos números no es igual a cero.

Para concretar, supongamos que $M > 0$ y que la función toma su valor máximo cuando $x = c$, es decir, $f(c) = M$. Observemos que c es diferente de a y de b ya que, según la condición, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Si $f(c)$ es el valor máximo de la función, entonces $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, tanto para $\Delta x > 0$, como para $\Delta x < 0$.

De aquí se deduce que:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0, \text{ cuando } \Delta x > 0; \quad (1')$$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0, \text{ cuando } \Delta x < 0. \quad (1'')$$

Ya que, según la hipótesis del teorema, existe la derivada en el punto $x = c$, entonces, pasando al límite, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtene-

*) El número c se denomina raíz de la función $\varphi(x)$, si $\varphi(c) = 0$

mos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0, \text{ cuando } \Delta x > 0;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0, \text{ cuando } \Delta x < 0.$$

Pero las correlaciones $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$ son compatibles sólo para el caso en que $f'(c) = 0$. Por tanto, dentro del segmento $[a, b]$ hay un punto c , en el cual la derivada $f'(x)$ es cero.

El teorema sobre las raíces de la derivada tiene una interpretación geométrica muy sencilla. Si una curva continua, con tangente

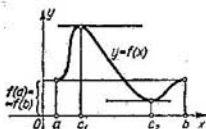


Fig. 91

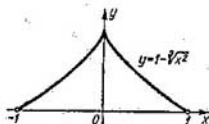


Fig. 92

en cada uno de sus puntos, corta el eje Ox en los puntos de abscisas a y b , entonces en esta curva existirá por lo menos un punto de abscisa c , $a < c < b$, en el cual la tangente es paralela al eje Ox .

Observación 1. El teorema demostrado es también válido para una función derivable que en los extremos del segmento $[a, b]$ no se reduzca a cero, sino tome valores iguales: $f(a) = f(b)$ (fig. 91). La demostración es análoga a la anterior.

Observación 2. Si la función $f(x)$ es tal que no tiene derivada en todos los puntos del segmento $[a, b]$, el teorema puede ser falso (es decir, que en este caso, en el segmento $[a, b]$ puede no existir un punto c en el que la derivada $f'(x)$ se reduzca a cero).

Por ejemplo, la función

$$y = f(x) = 1 - \sqrt{x^2}$$

(fig. 92) es continua en el segmento $[-1, 1]$ y se reduce a cero en los extremos del mismo; sin embargo, la derivada

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt{x}}$$

no se reduce a cero dentro del segmento. Esto se debe a que dentro del mismo hay un punto $x = 0$, en el cual no existe derivada (se reduce al infinito).

La gráfica de la figura 93 nos da un ejemplo más de una función, cuya derivada no se reduce a cero en el segmento $[0, 2]$.

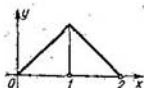


Fig. 93

Para esta función tampoco se cumplen las condiciones del teorema de Rolle, puesto que la función no tiene derivada en el punto $x = 1$.

§ 2. TEOREMA SOBRE LOS INCREMENTOS FINITOS (TEOREMA DE LAGRANGE)

Teorema de Lagrange. Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores del mismo, dentro del segmento $[a, b]$ existirá por lo menos un punto c , $a < c < b$ en que

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a). \quad (1)$$

Demostración. Designemos por Q el número $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, es decir,

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (2)$$

y examinemos la función auxiliar $F(x)$, determinada por la igualdad

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q. \quad (3)$$

Veamos el significado geométrico de la función $F(x)$. Para ello escribamos primero la ecuación de la cuerda AB (fig. 94), teniendo en cuenta que su coeficiente angular es igual a $Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, y que la cuerda pasa por el punto $(a; f(a))$:

$$y - f(a) = Q(x - a);$$

de donde,

$$y = f(a) + Q(x - a).$$

Pero $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x-a)]$. Por tanto, para cada valor de x , $F(x)$ es igual a la diferencia entre las ordenadas de la curva, $y = f(x)$, y la cuerda $y = f(a) + Q(x-a)$, para los puntos de una misma abscisa x .

Es fácil ver que $F(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, derivable en su interior y se reduce a cero en los extremos, es decir,

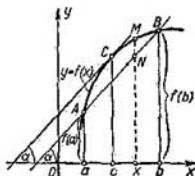


Fig. 94

$F(a) = 0$, $F(b) = 0$. Por eso, a la función $F(x)$ se puede aplicar el teorema de Rolle, según el cual, dentro del segmento existe un punto $x = c$, de tal manera que

$$F'(c) = 0.$$

Pero

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Es decir,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

de donde

$$Q = f'(c).$$

Sustituyendo el valor de Q en la igualdad (2), tendremos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad (1')$$

de donde se deduce directamente la fórmula (1). Así, pues, el teorema queda demostrado.

Con el fin de aclarar el significado geométrico del teorema de Lagrange veamos la figura 94. En ésta, la magnitud $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ representa la tangente del ángulo α de inclinación de la cuerda que pasa por los puntos A y B de la gráfica y cuyas abscisas son a y b . Por otra parte, $f'(c)$ es la tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente a la curva en el punto de abscisa c . De modo que, el significado geométrico de la igualdad (1'), equivalente

a la igualdad (1), es el siguiente: si por cada punto del arco AB puede trazarse una tangente, existirá en este arco, entre A y B , un punto C tal que en éste la línea tangente sea paralela a la cuerda que une los puntos A y B .

Observemos, ahora, lo siguiente; puesto que el valor c satisface la condición $a < c < b$, entonces, $c - a < b - a$, o sea,

$$c - a = \theta (b - a),$$

donde θ es un número comprendido entre 0 y 1, es decir,

$$0 < \theta < 1.$$

Pero, en este caso,

$$c = a + \theta (b - a),$$

y la fórmula (1) puede tomar la forma que sigue:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'[a + \theta(b - a)], \quad 0 < \theta < 1. \quad (1')$$

§ 3. TEOREMA SOBRE LA RAZON DE LOS INCREMENTOS DE DOS FUNCIONES (TEOREMA DE CAUCHY)

Teorema de Cauchy. *Siendo $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$ y derivables dentro del mismo, y si, además, $\varphi'(x)$ no se anula en el interior del segmento, entonces dentro de éste existirá un punto $x = c$, $a < c < b$ tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (1)$$

Demostración. Definamos el número Q por la igualdad

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \quad (2)$$

Observemos que $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, ya que en el caso contrario $\varphi(b)$ sería igual a $\varphi(a)$, y, según el teorema de Rolle, la derivada $\varphi'(x)$ se reduciría a cero dentro del segmento, lo que contradice a la hipótesis del teorema.

Formemos una función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

Es evidente, que $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$ (que se deduce de la definición de la función $F(x)$ y de la de Q). Teniendo en cuenta que la función $F(x)$ satisface en el segmento $[a, b]$ todas las condiciones del teorema de Rolle, deducimos que entre a y b existe un valor $x = c$ ($a < c < b$) tal que $F'(c) = 0$. Pero, $F'(x) = f'(x) -$

— $Q\varphi'(x)$ y entonces

$$F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0,$$

de donde:

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Sustituyendo el valor de Q en la igualdad (2), obtendremos la igualdad (1).

Observación. Contrariamente a lo que parece a primera vista, el teorema de Cauchy no se puede demostrar aplicando el teorema de Lagrange a los dos términos de la fracción

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

En efecto, en este caso obtendríamos (después de reducir la fracción por $b - a$) la fórmula:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)},$$

en la que $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$. Pero como, en el caso general, $c_1 \neq c_2$, el resultado obtenido, no confirma, evidentemente, el teorema de Cauchy.

§ 4. LIMITE DE LA RAZÓN DE DOS INFINITESIMALES

(«CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DEL TIPO $\frac{0}{0}$ »)

Supongamos que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy en cierto segmento $[a, b]$ y se reducen a cero en el punto $x = a$ del mismo, es decir, $f(a) = 0$ y $\varphi(a) = 0$.

La razón $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ no está definida, cuando $x = a$, pero tiene, sin embargo, un significado bien determinado para los valores de $x \neq a$. Por tanto, se puede plantear el problema de hallar el límite de esta razón, cuando $x \rightarrow a$. El cálculo de los límites de esta índole se llama habitualmente «cálculo de límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ ».

Nos hemos encontrado con problemas de este género cuando considerábamos, por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ y cuando hallábamos las derivadas de las funciones elementales. La expresión $\frac{\sin x}{x}$ no tiene sentido, cuando $x = 0$, es decir, la función $F(x) = \frac{\sin x}{x}$

no está definida, cuando $x = 0$, pero hemos visto que el límite de la expresión $\frac{\sin x}{x}$, cuando $x \rightarrow 0$, existe y es igual a 1.

Teorema (Regla de L'Hospital). *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ satisfacen en cierto segmento $[a, b]$ las condiciones del teorema de Cauchy y se reducen a cero en el punto $x = a$, es decir, $f(a) = \varphi(a) = 0$; entonces, si existe el límite de la razón $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, cuando $x \rightarrow a$, existirá también $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ y además:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Demostración. Tomemos en el segmento $[a, b]$ un punto $x \neq a$. Aplicando la fórmula de Cauchy, tendremos:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

donde ξ se encuentra entre a y x . Según la condición, $f(a) = \varphi(a) = 0$. Esto significa que:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \quad (1)$$

Si $x \rightarrow a$, también $\xi \rightarrow a$, ya que ξ está comprendida entre x y a . Al mismo tiempo, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, entonces existirá también

$\lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ igual a A .

Está claro que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

y en definitiva:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Observación 1. El teorema es válido también en el caso en que las funciones $f(x)$ ó $\varphi(x)$ no están definidas en $x = a$, pero

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

Para reducir este caso al examinado anteriormente, es necesario

definir adicionalmente las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ en el punto $x = a$ de tal modo que éstas sean continuas en dicho punto.

Para esto es suficiente poner

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0; \quad \varphi(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0,$$

ya que, evidentemente, el límite de la razón $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, cuando $x \rightarrow a$, no depende de que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ estén o no definidas en el punto $x = a$.

Observación 2. Si $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ y las derivadas $f'(x)$ y $\varphi'(x)$ satisfacen las condiciones puestas sobre las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, según la hipótesis del teorema, entonces, aplicando la regla de L'Hospital para la razón $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, obtendremos la fórmula:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}, \text{ etc.}$$

Observación 3. Si $\varphi'(a) = 0$, pero $f'(x) \neq 0$, el teorema se aplica a la razón inversa $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, que tiende a cero, cuando $x \rightarrow a$.

Por tanto, la razón $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tiende al infinito.

Ejemplo 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ejemplo 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

En este caso fue necesario aplicar tres veces la regla de L'Hospital, puesto que, para $x=0$, las razones de las primeras, segundas y terceras derivadas conducen a la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Observación 4. La regla de L'Hospital también puede ser aplicada, cuando

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0.$$

En efecto, haciendo $x = \frac{1}{z}$, vemos que $z \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow \infty$, y, por tanto:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Aplicando la misma regla de L'Hospital a la razón $\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$ halla-

mos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \end{aligned}$$

lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo 4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cos \frac{k}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} k \cos \frac{k}{x} = k.$$

§ 5. LIMITE DE LA RAZON DE DOS MAGNITUDES INFINITAMENTE GRANDES

(«CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE LA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$ »)

Examinemos el problema acerca del límite de la razón de las dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, que tienden al infinito, cuando $x \rightarrow a$ (o cuando $x \rightarrow \infty$).

Teorema. Supongamos que $f(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones continuas y derivables, para todos los valores de $x \neq a$ en la vecindad del punto a , y que la derivada $\varphi'(x)$ no se reduce a cero. Supongamos también que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$$

y que existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \quad (1)$$

Entonces existirá también el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, o sea:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \quad (2)$$

Demostración. En la vecindad considerada del punto a elijamos dos puntos α y x de tal modo que

$$\alpha < x < a \quad (\text{ó } a > x > \alpha).$$

Según el teorema de Cauchy, tendremos:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad (3)$$

donde $\alpha < c < x$. El primer miembro de la igualdad (3) lo transformaremos así:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}. \quad (4)$$

De las correlaciones (3) y (4) obtenemos:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}.$$

De donde:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}. \quad (5)$$

De la condición (1) se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, se puede elegir α tan próximo de a , que para todos los valores de $x = c$, donde $\alpha < c < a$, se cumpla la desigualdad

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} < A + \varepsilon. \quad (6)$$

Examinemos, ahora, la fracción

$$\frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}.$$

Fijemos α de tal manera que se cumpla la desigualdad (6), y aproximemos x al valor a . Ya que $f(x) \rightarrow \infty$ y $\varphi(x) \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow a$, tendremos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1$$

y, por consiguiente, para el valor de $\varepsilon > 0$, prefijado anteriormente, para x , suficientemente próximo de a , tendremos:

$$\left| \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} \right| < \varepsilon$$

6

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} < 1 + \varepsilon. \quad (7)$$

Multiplicando miembro a miembro las desigualdades (6) y (7), obtenemos:

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon),$$

o, en virtud de la igualdad (5):

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon).$$

Puesto que ε es un número arbitrariamente pequeño, cuando x se encuentra lo suficientemente próximo de a , de las últimas desigualdades se deduce:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A,$$

o, según (1):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

lo que se trataba de demostrar.

Observación 1. Si en (1), $A = \infty$, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty,$$

la igualdad (2) sigue siendo válida. En efecto, de la expresión anterior se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0.$$

Según el teorema demostrado:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = 0,$$

de donde,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Observación 2. El teorema se puede generalizar fácilmente al caso en que $x \rightarrow \infty$.

En el caso de que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ y existe

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (8)$$

Esto se demuestra haciendo la sustitución de $x = \frac{1}{z}$, como se hizo en condiciones análogas, al calcular los límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ (véase § 4, observación 4).

Ejemplo 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

Observación 3. Insistamos una vez más en que las fórmulas (2) y (8) se verifican sólo cuando exista el límite (finito o infinito) del segundo miembro. Puede ocurrir que exista el límite del primer miembro y el del segundo no, como ocurre en el caso siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}.$$

Este límite existe y es igual a 1. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

Pero la razón de las derivadas

$$\frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$$

no tiende a ningún límite, cuando $x \rightarrow \infty$, sino que oscila entre 0 y 2.

Ejemplo 2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 - d} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}.$$

Ejemplo 3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\lg x}{\lg 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 3 \cos 3x \sin 3x}{2 \cos x \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin 3x}{\sin x} \cdot \frac{(-1)}{(1)} = 3 \frac{(-1)}{(1)} \cdot \frac{(-1)}{(1)} = 3. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

En general, para cualquier número entero $n > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots 1}{e^x} = 0.$$

Los cálculos de los límites indeterminados, que simbólicamente se representan así:

$$a) 0 \cdot \infty; \quad b) 0^0; \quad c) \infty^0; \quad d) 1^\infty; \quad e) \infty - \infty,$$

se reducen a los casos ya examinados.

El significado de estos límites indeterminados es como sigue:

a) Suponiendo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$, hallar

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)].$$

Esta es una indeterminación de tipo $0 \cdot \infty$.

Escribiendo esta expresión en la forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

o en la forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

obtendremos, para $x \rightarrow a$, una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{n}{x^{n+1}}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{n} = 0.$$

b) Sea:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0,$$

hallar

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)},$$

o, como suele decirse, calcular el límite indeterminado de tipo 0^0 .
Poniendo

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

y tomando logaritmos en ambos miembros de la igualdad, tendremos

$$\ln y = \varphi(x) [\ln f(x)].$$

Si $x \rightarrow a$, obtenemos en el segundo miembro una indeterminación de tipo $0 \cdot \infty$. Una vez calculado el $\lim_{x \rightarrow a} \ln y$, será fácil hallar el $\lim_{x \rightarrow a} y$. Efectivamente, en virtud de la continuidad de la función logarítmica, se tiene $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow a} y$, y si $\ln \lim_{x \rightarrow a} y = b$, resultará, evidentemente, que $\lim_{x \rightarrow a} y = e^b$. Si, como caso particular, $b = +\infty$ ó $b = -\infty$, entonces será, respectivamente, $\lim_{x \rightarrow a} y = +\infty$ ó $\lim_{x \rightarrow a} y = 0$.

Ejemplo 6. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$. Haciendo $y = x^x$, hallamos $\ln \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (x^x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

por tanto, $\ln \lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, de donde resulta que $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$$

De un modo análogo se calculan los límites en los demás casos.

§ 6. FORMULA DE TAYLOR

Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene todas las derivadas, hasta la de orden $(n+1)$ inclusive, en cierto segmento que contiene el punto $x = a$. Hallemos un polinomio $y = P_n(x)$ de grado no superior a n , cuyo valor en el punto $x = a$ sea igual al de la función $f(x)$ en el mismo punto, y los valores de sus derivadas hasta el n -ésimo orden sean iguales en el punto $x = a$ a los valores de las derivadas correspondientes de la función $f(x)$, en este punto:

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad P''_n(a) = f''(a), \quad \dots \\ \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \quad (1)$$

Es de suponer que este polinomio, en cierto aspecto, será «proximo» a la función $f(x)$.

Hallaremos este en forma de polinomio, siguiendo las potencias de $(x-a)$ con coeficientes indeterminados

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots \\ \dots + C_n(x-a)^n. \quad (2)$$

Los coeficientes indeterminados $C_1, C_2, \dots, C_n$ calculemos de tal modo que se cumplan las condiciones (1).

o, en forma desarrollada:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x). \quad (6)$$

El término $R_n(x)$ se conoce con el nombre de *término complementario*. Para aquellos valores de x en el que el término complementario $R_n(x)$ es pequeño, el polinomio $P_n(x)$ da un valor aproximado de la función $f(x)$.

Así, pues, la fórmula (6) permite sustituir la función $y = f(x)$ por el polinomio $y = P_n(x)$ con el grado correspondiente de precisión, igual al valor del término complementario $R_n(x)$.

Estimemos el valor del $R_n(x)$ para diferentes valores de x .

Escribamos el término complementario en la forma

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x), \quad (7)$$

Fig. 95

donde $Q(x)$ es la función que debemos hallar. Escribamos de nuevo la fórmula (6), del siguiente modo:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x). \quad (6')$$

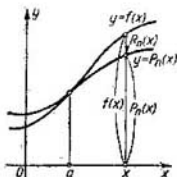
Considerando fijos los valores de x y a , la función $Q(x)$ tendrá un valor determinado, que designamos por Q .

Veamos ahora la función auxiliar de t (t está comprendido entre a y x):

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \dots$$

$$\dots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q,$$

donde el valor de Q viene determinado por la correlación (6'), cuando a y x son números determinados.



Halleemos la derivada $F'(t)$:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) - \\ - \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \dots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) - \\ - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q,$$

y reduciendo:

$$F'(t) = - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q. \quad (8)$$

Por consiguiente, la función $F(t)$ tiene derivada en todos los puntos t , próximos al punto de abscisa a . Observemos que, según la fórmula (6'), se tiene:

$$F(x) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Por eso, a la función $F(t)$ se le puede aplicar el teorema de Rolle y, por tanto, existe un valor $t = \xi$, comprendido entre a y x , para el cual $F'(\xi) = 0$. De aquí, en virtud de la correlación (8), obtenemos:

$$- \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q = 0,$$

de donde

$$Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

Introduciendo esta expresión en la fórmula (7), resulta:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Esta es la llamada *fórmula de Lagrange* para el término complementario.

Como ξ está comprendido entre x y a , puede ser representado en la forma*:

$$\xi = a + \theta(x-a),$$

*) Véase el final del § 2 del presente capítulo.

donde, θ es un número comprendido entre 0 y 1, es decir, $0 < \theta < 1$. En este caso la fórmula del término complementario toma la forma:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

La fórmula;

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ & \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \end{aligned} \quad (9)$$

se denomina *fórmula de Taylor* para la función $f(x)$.

Haciendo $a = 0$, la fórmula de Taylor se escribirá así:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \\ & \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \end{aligned} \quad (10)$$

donde, θ está comprendido entre 0 y 1. En este caso particular, la fórmula de Taylor toma también el nombre de fórmula de Maclaurin.

§ 7. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES e^x , $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{cos} x$ POR LA FÓRMULA DE TAYLOR

1. Desarrollo de la función $f(x) = e^x$.

Hallando las derivadas sucesivas de $f(x)$, obtendremos:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= e^x, & f'(0) &= 1, \\ &\dots & & \\ f^{(n)}(x) &= e^x, & f^{(n)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (10) § 6, tendremos:

$$e = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Si $|x| \leq 1$, haciendo $n = 8$, habremos evaluado el término complementario:

$$R_8 < \frac{1}{9!} 3.$$

Cuando $x = 1$, se obtiene la fórmula que permite hallar el valor aproximado del número e :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!};$$

realizando las operaciones sobre las fracciones decimales hasta el quinto signo después de la coma hallamos:

$$e = 2,71827.$$

Aquí se toman como exactas las primeras cuatro cifras decimales, ya que el error no es superior a $\frac{3}{9!}$ ó a 0,00001. Tengamos en cuenta que para cualquiera x el término complementario será

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Efectivamente, si $\theta < 1$, y x tiene un valor fijo, la magnitud $e^{\theta x}$ está acotada (es menor que e^x , cuando $x > 0$, y menor que 1, cuando $x < 0$).

Demostremos que, para todo x fijo, se verifica:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

En efecto,

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \dots \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right|.$$

Si x es un número fijo, se hallará un entero positivo N tal que $|x| < N$.

Ponemos $\frac{|x|}{N} = q$. Entonces, teniendo en cuenta que $0 < q < 1$, siendo $n = N + 1, N + 2, N + 3$, etc., podemos escribir:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| &= \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \dots \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1} \right| = \\ &= \left| \frac{x}{1} \right| \cdot \left| \frac{x}{2} \right| \cdot \left| \frac{x}{3} \right| \dots \left| \frac{x}{N-1} \right| \cdot \left| \frac{x}{N} \right| \dots \left| \frac{x}{n} \right| \cdot \left| \frac{x}{n+1} \right| < \\ &< \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \dots \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \dots q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} q^{n-N+2}, \end{aligned}$$

puesto que

$$\left| \frac{x}{N} \right| = q; \quad \left| \frac{x}{N+1} \right| < q; \quad \dots; \quad \left| \frac{x}{n+1} \right| < q.$$

Pero la magnitud $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ es constante, es decir, no depende de n , mientras que q^{n-N+2} tiende a cero, cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \quad (1)$$

y entonces,

$$R_n(x) = e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

De lo anterior se deduce que para todo valor de x se puede calcular e^x con cualquier grado de precisión, tomando el número suficiente de términos.

2. Desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Halleemos las derivadas sucesivas de $f(x) = \operatorname{sen} x$:

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \operatorname{cos} x = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right), \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(x + 2 \frac{\pi}{2} \right), \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\operatorname{cos} x = \operatorname{sen} \left(x + 3 \frac{\pi}{2} \right), \quad f'''(0) = -1,$$

$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(x + 4 \frac{\pi}{2} \right), \quad f^{IV}(0) = 0,$$

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen} \left(x + n \frac{\pi}{2} \right), \quad f^{(n)}(0) = \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2}.$$

$$f^{(n+1)}(x) = \operatorname{sen} \left[x + (n+1) \frac{\pi}{2} \right], \quad f^{(n+1)}(\xi) = \operatorname{sen} \left[\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right].$$

Introduciendo las expresiones halladas en la fórmula (10) § 6, obtenemos el desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ según la fórmula

de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\dots + \frac{x^n}{n!} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{sen} \left[\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right],$$

y puesto que $\left| \operatorname{sen} \left[\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right] \right| \leq 1$, se tendrá $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x .

Apliquemos la fórmula obtenida para el cálculo aproximado de

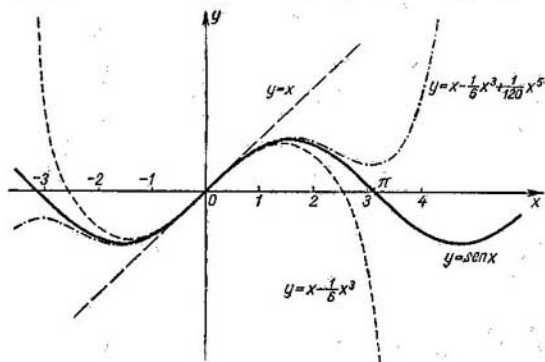


Fig. 96

$\operatorname{sen} 20^\circ$. Hagamos $n = 3$, es decir, nos limitaremos a los dos primeros términos del desarrollo:

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \operatorname{sen} \frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 = 0,343.$$

Evaluemos el error que resulta igual al término complementario:

$$|R_3| = \left| \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} \operatorname{sen} (\xi + 2\pi) \right| \leq \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} = 0,0006 < 0,001.$$

Por tanto, el error es inferior a 0,001, es decir, $\operatorname{sen} 20^\circ = 0,343$, con un error menor de 0,001.

En la figura 96 están representadas las gráficas de la función $f(x) = \sin x$ y de las tres primeras aproximaciones:

$$S_1(x) = x; \quad S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}; \quad S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

3. Desarrollo de la función $f(x) = \cos x$.

Hallando los valores de las derivadas sucesivas de la función $f(x) = \cos x$ para $x = 0$ e introduciéndolos en la fórmula de Maclaurin, obtendremos el desarrollo:

$$\begin{aligned} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \dots + \frac{x^n}{n!} \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left[\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right], \\ |\xi| < |x|. \end{aligned}$$

Aquí también $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x .

Ejercicios para el capítulo IV

Comprobar que el teorema de Rolle es válido para las funciones: 1. $y = x^3 - 3x + 2$ en el segmento $[1, 2]$. 2. $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ en el segmento $[0, 1]$. 3. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ en el segmento $[1, 3]$. 4. $y = \sin^2 x$ en el segmento $[0, \pi]$. 5. La función $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ tiene por raíces 1 y -1. Hallar la raíz de la derivada $f'(x)$, estudiada en el teorema de Rolle. 6. Comprobar que entre las raíces de la función $y = \sqrt[3]{x^3 - 5x + 6}$ se halla la de su derivada. 7. Comprobar que el teorema de Rolle es válido para la función $y = \cos^2 x$ en el segmento $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. 8. La función $y =$

$1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del segmento $[-1, 1]$. Demostrar que la derivada de esta función no se reduce a cero en ningún punto del segmento $[-1, 1]$. Explicar por qué razón no es aplicable en este caso el teorema de Rolle. 9. Escribir la fórmula de Lagrange para la función $y = \sin x$ en el segmento $[x_1, x_2]$. Respuesta: $\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1) \cos \xi$, $x_1 < \xi < x_2$. 10. Comprobar que la fórmula de Lagrange es válida para la función $y = 2x - x^2$ en el segmento $[0, 1]$. 11. ¿En qué punto de la curva $y = x^n$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $M_1(0, 0)$ y $M_2(a, a^n)$?

Respuesta: en el punto de abscisa $c = \frac{a}{n-1} \sqrt[n]{n}$. 12. ¿En qué punto de la curva $y = \ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $M_1(1, 0)$ y $M_2(e, 1)$? Respuesta: en el punto de abscisa $c = e - 1$.

Aplicando el teorema de Lagrange, demostrar las desigualdades: 13. $e^x > 1 + x$. 14. $\ln(1+x) < x$ ($x > 0$). 15. $b^n - a^n < n b^{n-1}(b-a)$ para $b > a$. 16. $\operatorname{arctg} x < x$. 17. Aplicar la fórmula de Cauchy a las funciones $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$ en el segmento $[1, 2]$ y hallar c . Respuesta: $c = \frac{14}{9}$.

- Calcular los límites siguientes: 18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$. Resp. $\frac{1}{n}$. 19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. Resp. 2. 20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. Resp. 2. 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$. Resp. -2 .
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$. Resp. No existe el límite. ($\sqrt{2}$ para $x \rightarrow +0$, $-\sqrt{2}$ para $x \rightarrow -0$). 23. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$. Resp. $-\frac{1}{8}$. 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$. Resp. $\ln \frac{a}{b}$. 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsen x}{\sin^3 x}$. Resp. $-\frac{1}{6}$. 26. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$. Resp. $\cos a$.
27. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y + \sin y - 1}{\ln(1+y)}$. Resp. 2. 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$. Resp. $\frac{1}{3}$. 29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{2x+5}$. Resp. $\frac{3}{2}$. 30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}$ (donde $n > 0$). Resp. 0.
31. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccotg} x}$. Resp. 1. 32. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\ln \frac{x-1}{x}}$. Resp. -1 . 33. $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{ay}}$. Resp. 0, cuando $a > 0$; ∞ , cuando $a \leq 0$. 34. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Resp. 1.
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$. Resp. 1. 36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} 7x}{\ln \operatorname{tg} 2x}$. Resp. 1. 37. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1) - x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x}}$. Resp. 0. 38. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. Resp. $\frac{2}{\pi}$.
39. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right]$. Resp. $-\frac{1}{2}$. 40. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right]$. Resp. -1 . 41. $\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi)$. Resp. 0. 42. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$. Resp. $\frac{1}{2}$.
43. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg 2x$. Resp. $\frac{1}{2}$. 44. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^3}}$. Resp. ∞ . 45. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. Resp. $\frac{1}{e}$. 46. $\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt[t]{t^2}$. Resp. 1. 47. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. Resp. 1. 48. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$. Resp. e^a .
49. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}}$. Resp. $\frac{1}{e}$. 50. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi-x}{2}}$. Resp. 1. 51. $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 52. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$. Resp. $\frac{1}{e}$. 53. Desarrollar en potencias

de $x-2$ el polinomio $x^4-5x^3+5x^2+x+2$. Respuesta: $2-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$. 54. Desarrollar en potencias de $x+1$ el polinomio $x^5+2x^4-x^2+x+1$. Respuesta: $(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$. 55. Aplicar la fórmula de Taylor a la función $y=\sqrt{x}$, cuando $a=1$, $n=3$.

Respuesta: $\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-1)^3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{3}{8}-\frac{(x-1)^4}{4!}\cdot\frac{5}{16}\times$
 $\times[1+\theta(x-1)]^{-7/2}$, $0<\theta<1$. 56. Aplicar la fórmula de Maclaurin a la función $y=\sqrt{1+x}$, cuando $n=2$. Respuesta: $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+$
 $+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}}$, $0<\theta<1$. 57. Tomando los resultados del ejemplo anterior,

evaluar el error de la igualdad aproximada $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$, cuando $x=0,2$. Respuesta: menos de $\frac{1}{2\cdot 10^3}$.

Explicar la procedencia de las igualdades aproximadas, válidas para pequeños valores de x , y evaluar el error de las mismas: 58. $\ln \cos x \approx -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$. 59. $\operatorname{tg} x \approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$. 60. $\operatorname{arcsen} x \approx x+\frac{x^3}{6}$. 61. $\operatorname{arctg} x \approx x-\frac{x^3}{3}$. 62. $\frac{e^x+e^{-x}}{2} \approx 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. 63. $\ln(x+\sqrt{1-x^2}) \approx x-\frac{x^3}{3!}$.

Aplicando la fórmula de Taylor, calcular los límites de las expresiones:

64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$. Resp. 1. 65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x}{1 - e^{-x^2}}$. Resp. 0.

66. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x) - x^3}{x^5}$. Resp. 1. 67. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$. Resp.

$\frac{1}{2}$. 68. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{cotg} x}{x} \right)$. Resp. $\frac{1}{3}$. 69. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x \right)$. Resp. $\frac{2}{3}$.

ANALISIS DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES

§ 1. GENERALIDADES

El estudio del aspecto cuantitativo de los diferentes fenómenos de la naturaleza se reduce al establecimiento y análisis de la dependencia funcional entre las magnitudes variables que participan en cada fenómeno. Si se logra expresar tal dependencia funcional de modo analítico, es decir, mediante una o varias fórmulas, podemos explorar la dependencia mencionada, sirviéndonos de los métodos del análisis matemático. Por ejemplo, al estudiar el fenómeno del movimiento de un proyectil en el vacío se obtiene la fórmula que determina el alcance de caída R en función del ángulo de elevación α y la velocidad inicial v_0 :

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

(donde g es la aceleración de la gravedad).

Con esta fórmula, podemos establecer a qué ángulo α , corresponde el alcance R , máximo o mínimo, en qué condiciones el crecimiento del ángulo α determina el aumento del alcance, etc.

Consideremos otro ejemplo. Como resultado del estudio de las oscilaciones de una carga sobre una ballesta (de un vagón, de un automóvil, etc.) se obtiene la fórmula de la desviación y de la carga, respecto a la posición de equilibrio, en función de tiempo t :

$$y = e^{-ht} (A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t).$$

Las magnitudes k , A , B , ω , que integran la fórmula, tienen un valor determinado para un sistema oscilatorio dado (dependen de la elasticidad de la ballesta, de la carga aplicada, etc., que no varían con el tiempo t) y, por eso, se consideran como constantes.

Con esta fórmula, se puede establecer para qué valores de t crece la desviación y al aumentar t , cómo varía la magnitud de la desviación máxima en función del tiempo, para qué valores de t estas desvia-

ciones son máximas, a qué valores de t corresponden las velocidades máximas del movimiento de la carga, etc.

Todos los problemas mencionados forman parte del concepto «análisis de la variación de una función». Es evidente que será difícil aclarar todas las cuestiones consideradas, calculando los valores de la función en puntos aislados (como se ha hecho en el capítulo II). La finalidad del presente capítulo consiste en establecer un método general para el análisis de la variación de funciones.

§ 2. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

En el § 6 del capítulo primero hemos dado la definición de una función creciente y decreciente. Apliquemos ahora el concepto de derivada al análisis del crecimiento y decrecimiento de una función.

Teorema. 1) Si la función $f(x)$, derivable en el segmento $[a, b]$, crece en este segmento, su derivada en éste no es negativa, es decir, $f'(x) \geq 0$.

2) Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y derivable sobre el intervalo (a, b) cuando $f'(x)$ es positiva para $a < x < b$, esta función es creciente sobre el segmento $[a, b]$.

Demostración. Demostremos la primera parte del teorema. Supongamos que $f(x)$ crece sobre el segmento $[a, b]$; demos al argumento x un incremento Δx y consideremos la razón

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Como $f(x)$ es una función creciente, se tiene:

$$f(x + \Delta x) > f(x) \quad \text{para } \Delta x > 0$$

y

$$f(x + \Delta x) < f(x) \quad \text{para } \Delta x < 0.$$

En ambos casos

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \quad (2)$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

es decir, $f'(x) \geq 0$, lo que se trataba de demostrar. [Si fuera $f'(x) < 0$, entonces, para valores de Δx suficientemente pequeños, la razón (1) sería negativa, lo que contradice a la relación (2)].

Pasemos ahora a la segunda parte del teorema. Sea $f'(x) > 0$ para todos los valores de x pertenecientes al intervalo (a, b) .

Consideremos dos valores arbitrarios, x_1 y x_2 , $x_1 < x_2$, pertenecientes al segmento $[a, b]$.

Conforme al teorema de Lagrange sobre incrementos finitos tenemos:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Puesto que $f'(\xi) > 0$, entonces $f(x_2) - f(x_1) > 0$, lo que significa que $f(x)$ es una función creciente. Existe un teorema análogo para las funciones decrecientes (si son derivables).

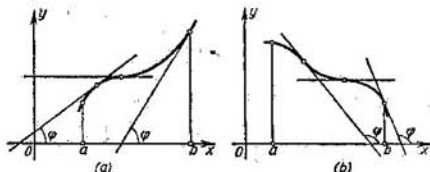


Fig. 97

Si la función $f(x)$ decrece sobre el segmento $[a, b]$, sobre el mismo segmento la derivada $f'(x) \leq 0$. Si $f'(x) < 0$ sobre el intervalo (a, b) , la función $f(x)$ decrece en el segmento $[a, b]$. Se supone que la función es también continua en cada punto del segmento $[a, b]$ y derivable en todo el intervalo (a, b) .

Observación. El teorema demostrado tiene la siguiente interpretación geométrica. Si la función $f(x)$ es creciente sobre el segmento $[a, b]$, la línea tangente a la curva $y = f(x)$, en cada punto del mismo, forma con el eje Ox un ángulo agudo φ , o en algunos puntos, puede ser paralela al eje. La tangente de este ángulo no es negativa: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geq 0$ (fig. 97, a).

Si la función $f(x)$ es decreciente sobre el segmento $[a, b]$ el ángulo de inclinación de la línea tangente será obtuso (en algunos puntos la línea tangente puede ser paralela al eje Ox). La tangente del ángulo no es positiva (fig. 97, b).

Del mismo modo se interpreta la segunda parte del teorema. El teorema permite juzgar sobre el crecimiento o decrecimiento de la función por el signo de su derivada.

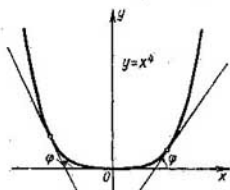


Fig. 98

Ejemplo: Determinéense los dominios de crecimiento y decrecimiento de la función

$$y = x^4.$$

Solución. La derivada es $y' = 4x^3$; $y' > 0$, es positiva para $x > 0$; es decir, la función crece;

$y' < 0$ es negativa, para $x < 0$, es decir, la función decrece (fig. 98).

§ 3. MÁXIMO Y MÍNIMO DE LAS FUNCIONES

Definición de máximo. Se dice que la función $f(x)$ tiene un *máximo* en el punto x_1 , si su valor es aquí mayor que en cualquier otro punto x de cierto intervalo que comprende el punto x_1 . Es decir, la función tiene un *máximo* en $x = x_1$, si $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ para todo valor de Δx (positivo o negativo) suficientemente pequeño en valor absoluto*.

Así, por ejemplo, la función $y = f(x)$, cuya gráfica se expone en la figura 99, tiene máximo cuando $x = x_1$.

Definición de mínimo. Se dice que la función $f(x)$ tiene un *mínimo* para $x = x_2$ si

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$$

para cualquier valor de Δx (positivo o negativo) suficientemente pequeño en valor absoluto (fig. 99).

Por ejemplo, la función $y = x^4$, examinada al final del párrafo anterior (véase fig. 98) tiene un mínimo en $x = 0$, ya que $y = 0$ cuando $x = 0$ e $y > 0$ para otros valores de x .

En relación con estas definiciones de máximo y de mínimo es necesario prestar atención a lo siguiente:

1. La función definida en un segmento puede alcanzar su valor máximo o mínimo sólo en los puntos comprendidos dentro del segmento considerado.

2. Sería un error suponer que el máximo y el mínimo de una función son respectivamente el mayor y menor valor de la misma en este segmento. En el punto del máximo, la función tiene el mayor valor sólo en comparación con los valores que ésta tiene en los puntos suficientemente próximos al punto del máximo. En el punto del mínimo, la función tiene el menor valor sólo en comparación con los valores que ésta tiene en los puntos suficientemente próximos al punto del mínimo.

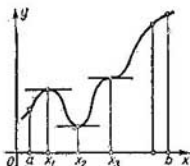


Fig. 99

*) A veces, esta definición se enuncia así: la función $f(x)$ tiene un *máximo* en el punto x_1 , si existe una vecindad (α, β) del punto x_1 ($\alpha < x_1 < \beta$) tal que para todos los puntos de la misma distintos de x_1 , se cumpla la desigualdad $f(x) < f(x_1)$.

En la fig. 100 se representa una función definida en el segmento $[a, b]$, que tiene:

máximo, cuando $x = x_1$ y $x = x_3$,

mínimo, cuando $x = x_2$ y $x = x_4$,

pero el mínimo de la función en $x = x_4$ es mayor que el máximo en $x = x_1$. Para $x = b$, el valor de la función es mayor que cualquier máximo de la función en el segmento considerado.

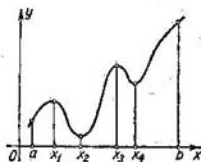


Fig. 100

Los máximos y los mínimos se llaman *valores extremos* de la función.

Los valores extremos de la función y su situación en el segmento $[a, b]$ caracterizan en cierto modo la variación de la función en dependencia de la variación del argumento.

Más adelante indicaremos el modo de calcular los valores extremos.

Teorema 1. (Condición necesaria para la existencia de un valor extremo).

Si la función derivable $y = f(x)$ tiene un máximo o un mínimo en el punto $x = x_1$, su derivada en este punto se reduce a cero, es decir, $f'(x_1) = 0$.

Demostración. Supongamos que en el punto $x = x_1$ la función tiene un máximo. Entonces, para los incrementos Δx ($\Delta x \neq 0$), suficientemente pequeños en valor absoluto, se verificará:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

es decir,

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Pero en este caso, el signo de la razón,

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

se determina por el de Δx :

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x < 0,$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x > 0.$$

Conforme a la definición de derivada, se tiene:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Si la función $f(x)$ tiene derivada en $x = x_1$, el límite del segundo miembro no depende de como Δx tiende a cero (permaneciendo positivo o negativo).

Pero, si $\Delta x \rightarrow 0$, siendo negativo, resulta:

$$f'(x_1) \geq 0.$$

Si $\Delta x \rightarrow 0$, siendo positivo, se tiene:

$$f'(x_1) \leq 0.$$

Puesto que $f'(x_1)$ es un número determinado que no depende de la manera en que Δx tiende a cero, las dos últimas desigualdades serán compatibles únicamente cuando

$$f'(x_1) = 0.$$

Del mismo modo se demuestra el teorema, cuando se trata del mínimo de la función.

Este teorema tiene el siguiente significado geométrico: si en los puntos de máximo o de mínimo la función $f(x)$ tiene derivada, la tangente a la curva $y = f(x)$ en estos puntos será paralela al eje Ox . Efectivamente, si $f'(x_1) = \operatorname{tg} \varphi = 0$, donde φ es el ángulo formado por la tangente y el eje Ox , se tiene que $\varphi = 0$ (fig. 99).

De este teorema se deduce, que si la función $f(x)$ tiene derivada para todos los valores considerados del argumento x , ésta puede tener valores extremos (máximo o mínimo) únicamente en los puntos en los que la derivada se reduce a cero. La conclusión recíproca no es cierta: una función puede no tener máximo ni mínimo en el punto en que la derivada se anula. En la figura 99 se representa una función cuya derivada se reduce a cero cuando $x = x_0$ (la tangente es horizontal); sin embargo, la función no tiene en este punto máximo ni mínimo. Análogamente, la función $y = x^3$ (fig. 101) tiene derivada igual a cero en $x = 0$:

$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0.$$

Pero en este punto la función no tiene máximo ni mínimo. En efecto, por muy cerca que se encuentre el punto x del punto 0, siempre se verificará

$$x^3 < 0 \quad \text{para } x < 0$$

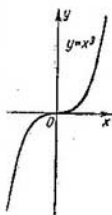


Fig. 101

y

$$x^3 > 0 \text{ para } x > 0.$$

Hemos analizado el caso en que la función tiene derivada en todos los puntos del segmento. ¿Y qué ocurre en los puntos donde no existe la derivada? En los ejemplos que siguen explicaremos que en los puntos donde la función no tiene derivada puede haber máximo o mínimo, pero puede ocurrir también que en éstos no haya ni uno ni otro.

Ejemplo 1. La función $y = |x|$ no tiene derivada en el punto $x = 0$ (en este punto la curva no tiene tangente determinada), pero en este punto

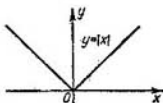


Fig. 102

la función dada admite un mínimo; en efecto, $y = 0$ cuando $x = 0$, mientras que para cualquier otro punto x , distinto de cero, tenemos $y > 0$ (fig. 102).

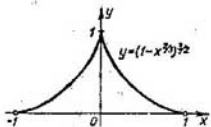


Fig. 103

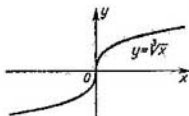


Fig. 104

Ejemplo 2. La función $y = (1 - x^2/2)^{3/2}$ no tiene derivada cuando $x = 0$, ya que la expresión $y' = -(1 - x^2/2)^{1/2} x^{-1/2}$ es igual al infinito cuando $x = 0$, no obstante, en este punto la función tiene máximo: $f(0) = 1$, $f(x) < 1$ para x diferente de cero (fig. 103).

Ejemplo 3. La función $y = \sqrt[3]{x}$ no tiene derivada en $x = 0$ ($y' \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$). En este punto la función no tiene ni máximo ni mínimo puesto que $f(0) = 0$; $f(x) < 0$ para $x < 0$; y $f(x) > 0$ para $x > 0$ (fig. 104).

Así pues, la función puede tener valores extremos solamente en los puntos donde la derivada existe y es igual a cero, o bien en aquellos donde no existe la derivada.

Observemos que si la derivada no existe en cierto punto, pero existe en los cercanos a éste, entonces la derivada tiene discontinuidad en dicho punto.

Los valores del argumento, en los que la derivada se reduce a cero o tiene discontinuidad, se llaman *valores o puntos críticos*.

De lo anterior se deduce que no para todo valor crítico la función tiene máximo o mínimo. Sin embargo, si en un punto la función admite un máximo o mínimo, este punto es obligatoriamente crítico. Por eso, para hallar los valores extremos de la función, se procede de la manera siguiente: hallamos todos los puntos críticos y después estudiamos cada uno de ellos aclarando, si hay o no en éstos un máximo o mínimo de la función.

El análisis de la función en los puntos críticos está basado en los teoremas siguientes.

Teorema 2. (Condiciones suficientes para la existencia de un valor extremo). *Supongamos que la función $f(x)$ es continua sobre cierto intervalo, al cual pertenece el punto crítico x_1 , y es derivable en cada punto del mismo (excepto, posiblemente, el mismo punto x_1). Si, al pasar por este punto de izquierda a derecha, el signo de la derivada cambia de «más» a «menos», entonces la función admite máximo en $x = x_1$. Si, al pasar por el punto x_1 , de izquierda a derecha, el signo de la derivada cambia de «menos» a «más», la función admite un mínimo en este punto.*

De modo que si:

$$a) \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{para } x < x_1 \\ f'(x) < 0 & \text{para } x > x_1, \end{cases}$$

en el punto x_1 la función tiene *máximo*;

$$b) \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{para } x < x_1 \\ f'(x) > 0 & \text{para } x > x_1 \end{cases}$$

en el punto x_1 la función tiene *mínimo*. Hay que tener en cuenta que las condiciones a) y b) deben cumplirse para todos los valores de x , suficientemente cercanos al valor x_1 , es decir, deben cumplirse en cada punto de la vecindad suficientemente pequeña, del punto crítico x_1 .

Demostración. Veamos primero el caso en que el signo de la derivada cambia de «más» a «menos», es decir que para todos los puntos x , suficientemente próximos al punto x_1 , se tiene:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x < x_1,$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } x > x_1.$$

Aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia $f(x) - f(x_1)$, obtenemos:

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),$$

donde ξ es un punto comprendido entre x y x_1 .

1) Sea $x < x_1$, entonces se tiene:

$$\xi < x_1, \quad f'(\xi) > 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

y, por tanto:

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

o sea

$$f(x) < f(x_1). \quad (1)$$

2) Sea $x > x_1$, entonces se tiene:

$$\xi > x_1, \quad f'(\xi) < 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

y, por tanto:

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

o sea

$$f(x) < f(x_1). \quad (2)$$

Las correlaciones (1) y (2) muestran que para todos los valores de x , suficientemente cercanos a x_1 , los valores de la función son menores que el valor de ésta en el punto x_1 . Por consiguiente, en este punto la función $f(x)$ tiene un máximo.

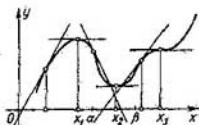


Fig. 105

Del modo análogo se demuestra la segunda parte del teorema, es decir, la condición suficiente para el valor mínimo.

La figura 105 nos ilustra claramente el sentido del teorema 2.

Supongamos que en el punto $x = x_1$ tenemos $f'(x_1) = 0$, y que en cada punto x , suficientemente cercano a x_1 , se cumplen las desigualdades:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x < x_1,$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } x > x_1.$$

Entonces, cuando $x < x_1$ la tangente a la curva forma con el eje Ox un ángulo agudo, y la función crece; cuando $x > x_1$, el ángulo formado por la tangente y el eje Ox es obtuso, y la función decrece. Cuando $x = x_1$, la función creciente comienza a decrecer, es decir, tiene un máximo.

Si en el punto x_2 tenemos $f'(x_2) = 0$ y para todos los valores de x , suficientemente cercanos a x_2 , se cumplen las desigualdades:

$$f'(x) < 0 \quad \text{para } x < x_2,$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x > x_2,$$

entonces, cuando $x < x_2$, la tangente a la curva forma con el eje Ox un ángulo obtuso, y la función decrece; cuando $x > x_2$ el ángulo formado por la tangente y el eje Ox es agudo y la función crece. Cuando $x = x_2$, la función decreciente pasa a ser creciente, es decir, tiene un mínimo.

Si para $x = x_3$ tenemos $f'(x_3) = 0$, y, para todos los valores de x , suficientemente cercanos a x_3 , se cumplen las desigualdades:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x < x_3,$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } x > x_3,$$

entonces, la función es creciente tanto para $x < x_3$ como para $x > x_3$. Por lo tanto, para $x = x_3$ la función no tiene ni máximo ni mínimo.

Precisamente este es el caso de la función $y = x^3$, cuando $x = 0$. En efecto, la derivada $y' = 3x^2$, por tanto:

$$(y')_{x=0} = 0,$$

$$(y')_{x<0} > 0,$$

$$(y')_{x>0} > 0,$$

lo que significa que en $x = 0$ la función no tiene máximo ni mínimo (fig. 104).

§ 4. ANALISIS DEL MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION DERIVABLE MEDIANTE LA PRIMERA DERIVADA

Basándonos en lo expuesto anteriormente podemos construir el esquema para el análisis de máximos y mínimos de una función derivable $y = f(x)$:

1. Hallar la primera derivada $f'(x)$ de la función.

2. Hallar los valores críticos del argumento x , para lo cual es necesario:

a) igualar a cero la primera derivada y encontrar las raíces reales de la ecuación obtenida $f'(x) = 0$;

b) determinar los valores de x para los cuales la derivada $f'(x)$ es discontinua.

3. Analizar el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Puesto que el signo de la derivada permanece invariable en el intervalo entre dos puntos críticos, entonces para

estudiar el signo de la derivada en ambos lados del punto crítico (x_2 , por ejemplo) (fig. 105), será suficiente determinar el signo de la derivada en los puntos α y β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 < \beta < x_3$, donde x_1 y x_3 son dos puntos críticos más próximos).

4. Calcular los valores de la función $f(x)$ para cada valor crítico del argumento.

De este modo, llegamos al siguiente esquema de casos posibles:

Signos de la derivada $f'(x)$ al pasar por el punto crítico x_1 :			Naturaleza del punto crítico
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	$f'(x_1) = 0$ ó es discontinua	-	Punto de máximo
-	$f'(x_1) = 0$ ó es discontinua	+	Punto de mínimo
+	$f'(x_1) = 0$ ó es discontinua	+	No hay máximo ni mínimo (la función crece)
-	$f'(x_1) = 0$ ó es discontinua	-	No hay máximo ni mínimo (la función decrece)

Ejemplo 1. Estúdiense el máximo y el mínimo de la función

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

Solución. 1) Hallamos la primera derivada:

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

2) Calculamos las raíces reales de la derivada:

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

Por consiguiente,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

La derivada es continua en todos los puntos y por tanto no existen otros puntos críticos.

3) Analizamos los valores críticos y los resultados los llevamos a la fig. 106. El primer punto crítico es, $x_1 = 1$. Como $y' = (x - 1)(x - 3)$, resulta que:

$$\text{para } x < 1 \text{ se tiene: } y' = (-) \cdot (-) > 0,$$

$$\text{para } x > 1 \text{ se tiene: } y' = (+) \cdot (-) < 0.$$

Esto quiere decir que al pasar (de izquierda a derecha) por el punto $x_1 = 1$, el signo de la derivada cambia de «más» a «menos». Por tanto, en $x = 1$ la función tiene un máximo:

$$(y)_{x=1} = \frac{7}{3}.$$

El segundo punto crítico es $x_2=3$

para $x < 3$ se tiene $y' = (+) \cdot (-) < 0$,

para $x > 3$ se tiene $y' = (+) \cdot (+) > 0$.

Esto significa que al pasar por el punto $x = 3$ el signo de la derivada cambia de «menos» a «más». Por tanto, en $x = 3$ la función tiene mínimo:

$$(y)_{x=3}=1.$$

Basándonos en este análisis trazamos la gráfica de la función (fig. 106)

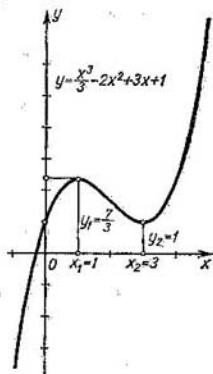


Fig. 106

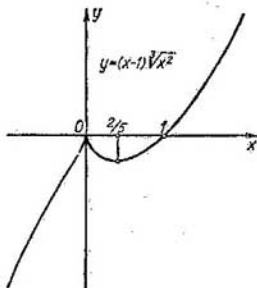


Fig. 107

Ejemplo 2. Analicémos los valores máximo y mínimo de la función

$$y = (x-1) \sqrt[3]{x^2}.$$

Solución. 1) Hallamos la primera derivada:

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2) Calculamos los valores críticos del argumento: a) encontramos los puntos en los que la derivada se reduce a «cero»:

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = \frac{2}{5};$$

b) encontramos los puntos en los cuales la derivada es discontinua (aquí la derivada se reduce al infinito). De tal punto sirve, evidentemente, el punto

$$x_2 = 0.$$

(Obsérvese que cuando $x_2 = 0$, la función está definida y es continua).

No existen más puntos críticos.

3) Analizamos la naturaleza de los puntos críticos obtenidos. Veamos primero el punto $x_1 = \frac{2}{5}$. Como

$$(y')_{x < \frac{2}{5}} < 0, \quad (y')_{x > \frac{2}{5}} > 0,$$

deducimos que en $x = \frac{2}{5}$ la función tiene un mínimo. El valor de la función en este punto es igual a

$$(y)_{x = \frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5} - 1\right) \sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Veamos ahora el segundo punto crítico, $x = 0$. Como

$$(y)_{x < 0} > 0, \quad (y')_{x > 0} < 0,$$

deducimos que en $x = 0$ la función tiene un máximo; siendo $(y)_{x=0} = 0$. La gráfica de la función analizada se expone en la figura 107.

§ 5. ANÁLISIS DEL MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE LA SEGUNDA DERIVADA

Supongamos que en $x = x_1$ la derivada de la función $y = f(x)$ se reduce a cero, es decir, $f'(x_1) = 0$. Admitamos, además que existe la segunda derivada, $f''(x)$, y es continua sobre cierta vecindad del punto x_1 . Para este caso es válido el siguiente teorema.

Teorema. Si $f'(x_1) = 0$, entonces en $x = x_1$ la función tiene máximo cuando $f''(x_1) < 0$, y, un mínimo cuando $f''(x_1) > 0$.

Demostración. Consideremos la primera parte del teorema.

Supongamos que $f'(x_1) = 0$ y $f''(x_1) < 0$, como, según la hipótesis, $f''(x)$ es continua en cierta vecindad del punto $x = x_1$, entonces existirá evidentemente un segmento pequeño, que incluya el punto $x = x_1$, en todos los puntos del cual la segunda derivada $f''(x)$ es negativa.

Puesto que $f'(x)$ es la derivada de la primera derivada $f''(x) = (f'(x))'$, de la condición $(f'(x))' < 0$ se infiere que $f'(x)$ decrece en el segmento que contiene el punto $x = x_1$ (§ 2, cap. V). Pero $f'(x_1) = 0$. Por consiguiente, en este segmento tenemos $f'(x) > 0$ cuando $x < x_1$, y $f'(x) < 0$ cuando $x > x_1$, es decir, el signo de la derivada $f'(x)$ cambia de «más» a «menos» al pasar por el punto $x = x_1$, lo que significa que en el punto x_1 la función $f(x)$ admite un máximo. La primera parte del teorema queda demostrada.

Del mismo modo se demuestra la segunda parte: si $f''(x_1) > 0$, entonces $f''(x) > 0$ en todos los puntos del segmento mencionado que incluye el punto x_1 ; pero, en este caso, en el segmento dado,

$f''(x) = (f'(x))' > 0$ y, por tanto, $f'(x)$ crece. Como $f'(x_1) = 0$, al pasar por el punto x_1 , el signo de la derivada $f'(x)$ cambia de «menos» a «más», es decir, la función $f(x)$ tiene un mínimo cuando $x = x_1$.

Si en el punto crítico $f''(x_1) = 0$, entonces en este punto puede haber un máximo o un mínimo, pero puede ocurrir que no exista ni uno ni otro. En este caso hay que realizar el análisis utilizando el primer método (véase § 4, cap. V).

El resultado del análisis de los valores extremos, mediante la segunda derivada, puede ser representado por la tabla siguiente:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Naturaleza del punto crítico
0	—	Punto del máximo
0	+	Punto del mínimo
0	0	Desconocido

Ejemplo 1. Hallar el máximo y mínimo de la función

$$y = 2\sin x - \cos 2x.$$

Solución. Puesto que la función es periódica y tiene un período de 2π , es suficiente estudiarla en el segmento $[0, 2\pi]$.

1) Hallamos la derivada

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - 2\sin x \cos x) = 2\cos x(1 - 2\sin x).$$

2) Calculamos los valores críticos del argumento:

$$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2}; \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}; \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

3) Hallamos la segunda derivada:

$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

4) Analizamos la naturaleza de cada punto crítico:

$$(y'')_{x_1 = \frac{\pi}{6}} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Por lo tanto, en el punto $x_1 = \frac{\pi}{6}$ tenemos el máximo:

$$(y)_{x = \frac{\pi}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Luego,

$$(y'')_{x = \frac{\pi}{2}} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 2 > 0.$$

Por consiguiente, en el punto $x_2 = \frac{\pi}{2}$ tenemos el mínimo

$$(y)_{x=\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

En el punto $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ tenemos:

$$(y'')_{x=\frac{5\pi}{6}} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Por tanto, para $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ la función tiene el máximo:

$$(y)_{x=\frac{5\pi}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Finalmente

$$(y'')_{x=\frac{3\pi}{2}} = -2(-1) - 4(-1) = 6 > 0.$$

Consecuentemente, en el punto $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ tenemos el mínimo:

$$(y)_{x=\frac{3\pi}{2}} = 2(-1) - 1 = -3.$$

La gráfica de la función analizada se da en la fig. 108.

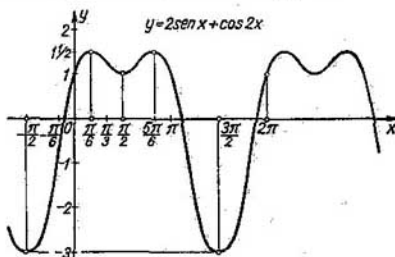


Fig. 108

Mostremos ahora con ejemplos que si $f'(x_1) = 0$ y $f''(x_1) = 0$, en cierto punto $x = x_1$ la función $f(x)$ puede tener un máximo o un mínimo en el mismo; pero, puede no haber ni uno ni otro.

Ejemplo 2. Analizar el máximo y el mínimo de la función

$$y = 1 - x^4.$$

Solución. 1) Hallemos los puntos críticos:

$$y' = -4x^3, \quad -4x^3 = 0, \quad x = 0.$$

2) Determinemos el signo de la segunda derivada cuando $x=0$:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Por consiguiente, en este caso es imposible determinar la naturaleza del punto crítico con ayuda del signo de la segunda derivada.

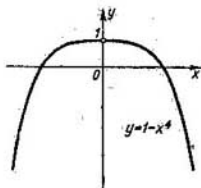


Fig. 109

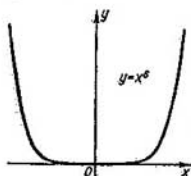


Fig. 110

3) Investiguemos la naturaleza del punto crítico utilizando el primer método (§ 4, cap. V):

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} < 0.$$

Por tanto, cuando $x=0$, la función tiene como máximo:

$$(y)_{x=0} = 0.$$

La gráfica de la función examinada se muestra en la fig. 109.

Ejemplo 3. Analizar el máximo y el mínimo de la función

$$y = x^6.$$

Solución. Mediante el segundo método, hallamos:

$$1) y' = 6x^5, \quad y' = 6x^5 = 0, \quad x = 0; \quad 2) y'' = 30x^4, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Por consiguiente, el segundo método no da la respuesta. Recurriendo al primer método, obtenemos:

$$(y')_{x<0} < 0, \quad (y')_{x>0} > 0.$$

Por tanto, cuando $x=0$ la función tiene un mínimo (fig. 110).

Ejemplo 4. Analizar el máximo y el mínimo de la función

$$y = (x-1)^3.$$

Solución. El segundo método

$$y' = 3(x-1)^2, \quad 3(x-1)^2 = 0, \quad x = 1;$$

$$y'' = 6(x-1), \quad (y'')_{x=1} = 0.$$

En este caso el segundo método no da la respuesta. Utilizando el primer método, hallamos:

$$(y')_{x<1} > 0, \quad (y')_{x>1} > 0.$$

Por tanto, cuando $x=1$, la función no tiene máximo ni mínimo (fig. 111).

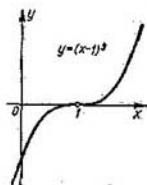


Fig. 111

§ 6. VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN EN UN SEGMENTO

Sea $y = f(x)$ una función continua en el segmento $[a, b]$. Entonces en este segmento la función alcanza su valor máximo (§ 10, cap. II). Supongamos que en el segmento dado la función $f(x)$ tenga un número finito de puntos críticos. Si el valor máximo se alcanza dentro del segmento $[a, b]$, es evidente que este valor será uno de los máximos de la función (si hay varios máximos), o sea, el máximo mayor. Pero puede ocurrir que el valor máximo es alcanzable en uno de los extremos del segmento.

Así pues, en el segmento $[a, b]$ la función adquiere su valor máximo en uno de los extremos del segmento dado, o bien en un punto interior del mismo, el del valor máximo.

Lo mismo puede decirse sobre el valor mínimo de la función: éste es alcanzable en uno de los extremos del segmento, o en un punto interior del mismo: en el punto del mínimo. De lo dicho se infiere la siguiente regla: para hallar el valor máximo de una función continua en el segmento $[a, b]$, es preciso:

- 1) hallar todos los máximos de la función en el segmento;
- 2) determinar los valores de la función en los extremos del segmento, es decir, calcular $f(a)$ y $f(b)$;
- 3) elegir el mayor valor de todos los valores obtenidos de la función. Este representará el valor máximo de la función en el segmento. Del mismo modo se debe proceder al determinar el valor mínimo de la función en el segmento.

Ejemplo. Determinar los valores máximo y mínimo de la función

$$y = x^3 - 3x + 3 \text{ en el segmento } \left[-3; \frac{3}{2}\right].$$

Solución. 1) Hallemos los máximos y mínimos de la función en el segmento $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$:

$$y' = 3x^2 - 3, \quad 3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1,$$

$$y'' = 6x, \quad (y'')_{x=1} = 6 > 0.$$

Por tanto, en el punto $x = 1$ hay un mínimo:

$$(y)_{x=1} = 1.$$

Luego

$$(y'')_{x=-1} = -6 < 0.$$

Por lo tanto, en el punto $x = -1$ hay un máximo:

$$(y)_{x=-1} = 5.$$

2) Determinar los valores de la función en los extremos del segmento:

$$(y)_{x=\frac{3}{2}} = \frac{15}{8}, \quad (y)_{x=-3} = -15.$$

De este modo, el valor máximo de la función examinada en el segmento $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ es: $(y)_{x=-1} = 5$, y el valor mínimo es:

$$(y)_{x=-3} = -15.$$

La gráfica de la función está representada en la fig. 112.



Fig. 112

§ 7. APLICACION DE LA TEORIA DE MAXIMOS Y MINIMOS DE LAS FUNCIONES A LA SOLUCION DE PROBLEMAS

La teoría de máximos y mínimos permite resolver varios problemas de geometría, mecánica, etc. Analicemos algunos de ellos.

Problema 1. La distancia $R = OA$ (fig. 113) (en el vacío) que cubre un proyectil, lanzado con velocidad inicial v_0 desde una pieza de artillería que tiene un ángulo de elevación φ respecto al horizonte, se determina según la fórmula:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(g es la aceleración de la gravedad). Determinar el ángulo φ con el cual la distancia R resultará máxima, dada la velocidad inicial v_0 .

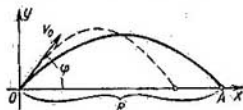


Fig. 113

Solución. La magnitud R es una función del ángulo variable φ . Analicemos el máximo de esta función en el segmento $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}; \quad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0; \quad \text{valor crítico } \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$\frac{d^2 R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g}; \quad \left(\frac{d^2 R}{d\varphi^2} \right)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

Por tanto, para $\varphi = \frac{\pi}{4}$ la función R tiene el máximo:

$$(R)_{\varphi = \frac{\pi}{4}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Los valores de la función R en los extremos del segmento $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ son iguales a:

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \quad (R)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

De este modo, el máximo hallado es precisamente el mayor valor de R .

Problema 2. ¿Que dimensiones debe tener un cilindro para que sea mínima su área total S , dado el volumen v ?

Solución. Designando por r y h el radio de la base del cilindro y su altura, respectivamente, tendremos:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Si el volumen del cilindro es conocido, h se expresa en función de r según la fórmula:

$$v = \pi r^2 h,$$

de donde

$$h = \frac{v}{\pi r^2}.$$

Sustituyendo la expresión de h en la fórmula para S , obtenemos:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{v}{\pi r^2},$$

o sea

$$S = 2\left(\pi r + \frac{v}{r}\right).$$

Aquí, v es el número dado. Por consiguiente hemos representado S como función de una variable independiente r . Hallemos el valor mínimo de esta función en el intervalo $0 < r < \infty$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r - \frac{v}{r^2} = 0, \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Por consiguiente, la función S tiene un mínimo en el punto $r = r_1$. Como $\lim_{r \rightarrow 0} S = \infty$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} S = \infty$, es decir, cuando r tiende a cero o al infinito, el área S crece infinitamente, lo que atestigua que la función S tiene un valor mínimo en el punto $r = r_1$.

Pero, si $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, resulta: $h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r$.

Por tanto, para que el área total S sea mínima, dado el volumen v , la altura del cilindro debe ser igual al diámetro de éste.

§ 8. ANALISIS DE LOS VALORES MAXIMO Y MINIMO DE UNA FUNCION MEDIANTE LA FORMULA DE TAYLOR

Como se ha indicado en el § 5, capítulo V, si en algún punto $x = a$ tenemos $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$, en éste puede haber un máximo o un mínimo, o bien no haya ni uno, ni otro. Hemos señalado que para resolver el problema en el caso dado, se recomienda realizar

el análisis mediante el primer método, es decir, estudiando el signo de la primera derivada a la izquierda y a la derecha del punto $x = a$.

En este caso se puede también realizar el estudio mediante la fórmula de Taylor (§ 6, cap. IV).

Con el fin de generalizar el estudio supongamos que no sólo $f''(x)$, sino todas las derivadas de la función $f(x)$, hasta el orden n — ésimo inclusive, se reducen a cero cuando $x = a$:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0, \quad (1)$$

mientras que

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Supongamos también que $f(x)$ tiene derivadas continuas hasta el orden $(n+1)$ inclusive, en la vecindad del punto $x = a$.

Escribamos la fórmula de Taylor para $f(x)$, tomando en cuenta las igualdades (1):

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2)$$

donde ξ es un número comprendido entre a y x . Como $f^{(n+1)}(x)$ es continua en la vecindad del punto a y $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, existirá un número positivo h tan pequeño que para todo x , que satisfaga la desigualdad $|x-a| < h$, se tenga $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Además, si $f^{(n+1)}(a) > 0$, en todos los puntos del intervalo $(a-h, a+h)$ será $f^{(n+1)}(x) > 0$; si $f^{(n+1)}(a) < 0$, en todos los puntos del intervalo mencionado $f^{(n+1)}(x)$ será negativa.

Escribamos la fórmula (2) en la forma:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2')$$

y examinemos diferentes casos particulares.

Primer caso: n es un número impar.

a) Sea $f^{(n+1)}(a) < 0$. Entonces existirá tal intervalo $(a-h, a+h)$, en cada punto del cual la derivada de orden $(n+1)$ es negativa. Siendo x un punto de este intervalo, ξ también se encontrará entre $a-h$ y $a+h$. Por consiguiente, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$. Puesto que $n+1$ es un número par, entonces $(x-a)^{n+1} > 0$ cuando $x \neq a$, y, por eso, el segundo miembro de la fórmula (2') es negativo.

Por consiguiente, cuando $x \neq a$ en todos los puntos del intervalo $(a-h, a+h)$ tenemos:

$$f(x) - f(a) < 0,$$

lo que significa que la función tiene un máximo en el punto $x = a$.

b) Sea $f^{(n+1)}(a) > 0$. Entonces, para un valor h suficientemente pequeño tenemos $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ en todos los puntos x del intervalo

$(a - h, a + h)$. Por tanto, el segundo miembro de la fórmula (2') será positivo, es decir, cuando $x \neq a$, en todos los puntos del intervalo indicado será:

$$f(x) - f(a) > 0,$$

lo que significa que la función tiene un mínimo en el punto $x = a$.

Segundo caso: n es un número par.

El número $n + 1$ será impar y la magnitud $(x - a)^{n+1}$ tendrá signos opuestos cuando $x < a$ y $x > a$. Si h es suficientemente pequeño en valor absoluto, la derivada de orden $(n + 1)$ en todos los demás puntos del intervalo $(a - h, a + h)$ conserva el mismo signo que en el punto a . Por consiguiente, $f(x) - f(a)$ tiene signos diferentes para $x < a$, y para $x > a$. Esto significa que en el punto $x = a$ no existe máximo, ni mínimo.

Observemos que, si n es par y $f^{(n+1)}(a) > 0$, entonces $f(x) < f(a)$ para $x < a$, y $f(x) > f(a)$ para $x > a$. Pero si n es par y $f^{(n+1)}(a) < 0$, entonces $f(x) > f(a)$ para $x < a$, y $f(x) < f(a)$ para $x > a$.

Se puede formular los resultados obtenidos del modo siguiente: Cuando $x = a$, tenemos:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$$

y la primera derivada $f^{(n+1)}(a)$, que no se anula, es de orden *par* entonces en el punto a la función $f(x)$ tiene un *máximo*, si $f^{(n+1)}(a) < 0$; la función $f(x)$ tiene un *mínimo*, si es $f^{(n+1)}(a) > 0$. Si la primera derivada $f^{(n+1)}(a)$, que no se anula, es la de orden *impar*, en el punto a la función no tiene máximo, ni mínimo. Además,

$$f(x) \text{ crece, si } f^{(n+1)}(a) > 0;$$

$$f(x) \text{ decrece, si } f^{(n+1)}(a) < 0.$$

Ejemplo. Analizar el máximo y el mínimo de la función:

$$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Solución. Hallemos los valores críticos de la función

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

De la ecuación

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

obtenemos el único punto crítico:

$$x = 1$$

(ya que la ecuación dada tiene sólo una raíz real).

A continuación estudiamos la naturaleza del punto crítico $x = 1$:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0 \text{ para } x = 1,$$

$$f'''(x) = 24x - 24 = 0 \text{ para } x = 1,$$

$$f^{IV}(x) = 24 > 0 \text{ para todo } x \text{ cualquiera.}$$

Por consiguiente, cuando $x = 1$, la función $f(x)$ tiene un mínimo.

§ 9. CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE LA CURVA. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Sea una curva plana $y = f(x)$ que representa la función $f(x)$, uniforme y derivable.

Definición. Se dice que la curva es *convexa hacia arriba* en el intervalo (a, b) , si todos los puntos de la misma están por debajo de cualquier tangente a la curva en este intervalo.

Se dice que la curva es *convexa hacia abajo* en el intervalo (b, c) , si todos los puntos de la misma están situados por arriba de cualquier tangente a la curva en este intervalo.



Fig. 114

La curva que tiene la convexidad hacia arriba se llama *convexa*, igual que la curva que tiene la convexidad hacia abajo se denomina *cóncava*.

En la figura 114 se muestra una curva convexa en el intervalo (a, b) y cóncava en el intervalo (b, c) .

La dirección de la convexidad de la curva es una característica importante de su forma. A continuación determinemos los criterios según los cuales, durante el estudio de la función $y = f(x)$, podemos juzgar sobre la dirección de su convexidad en diferentes intervalos.

Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 1. Si la segunda derivada de la función $f(x)$ es negativa en todos los puntos del intervalo (a, b) , es decir, si $f''(x) < 0$, la curva $y = f(x)$ tiene su convexidad dirigida hacia arriba en este intervalo (la curva es convexa).

Demostración. Tomemos en el intervalo (a, b) un punto arbitrario $x = x_0$ (fig. 114) y tracemos una tangente a la curva en el punto cuya abscisa es $x = x_0$. El teorema quedará demostrado, si establecemos que todos los puntos de la curva en el intervalo (a, b) están situados por debajo de la tangente, es decir, la ordenada de cualquier punto de la curva $y = f(x)$ es menor que la ordenada y de la tangente, para un mismo valor de x .

La ecuación de la curva es:

$$y = f(x) \quad (1)$$

La ecuación de la tangente a la curva en el punto $x = x_0$ tiene la forma:

$$\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

o sea

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce que para un mismo valor de x la diferencia de las ordenadas de la curva y de la tangente es igual a:

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia $f(x) - f(x_0)$, obtenemos:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

(donde c se encuentra entre x_0 y x) o sea,

$$y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Apliquemos de nuevo el teorema de Lagrange a la expresión del corchete:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \quad (3)$$

(donde c_1 se encuentra entre x_0 y c).

Examinemos primero el caso, cuando $x > x_0$. Aquí: $x_0 < c < x$, puesto que

$$x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0;$$

además, según la condición:

$$f''(c_1) < 0,$$

de la ecuación (3) se deduce que $y - \bar{y} < 0$.

Examinemos ahora el caso cuando $x < x_0$. Por ahora: $x < c < c_1 < x_0$, y $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$. Puesto que, según la condición, $f''(c_1) < 0$, entonces de la igualdad (3) se deduce que:

$$y - \bar{y} < 0.$$

Hemos comprobado que cualquier punto de la curva está situado por debajo de la tangente a la misma, cualesquiera que sean los valores de x y x_0 en el intervalo (a, b) . Esto significa que la curva es convexa. Queda así demostrado el teorema.

Del mismo modo se comprueba el teorema siguiente:

Teorema 1'. Si la segunda derivada de la función $f(x)$ es positiva en todos los puntos del intervalo (b, c) , es decir, si $f''(x) > 0$, la curva $y = f(x)$ tiene su convexidad dirigida hacia abajo en este intervalo (la curva es cóncava).

Observación. El significado geométrico de los teoremas 1 y 1' puede ser interpretado de modo siguiente. Estudiemos la curva $y = f(x)$ que tiene su convexidad dirigida hacia arriba en el intervalo (a, b) (fig. 115). La derivada $f'(x)$ es igual a la tangente del

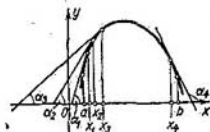


Fig. 115

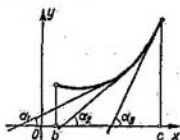


Fig. 116

ángulo α formado por la línea tangente a la curva y el eje Ox en el punto de abscisa x , es decir, $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$. Por lo tanto $f''(x) = [\operatorname{tg} \alpha]'_x$.

Si $f''(x) < 0$ para cualquier x en el intervalo (a, b) , esto quiere decir que $\operatorname{tg} \alpha$ decrece a medida que crece x . Desde el punto de vista geométrico está claro que si $\operatorname{tg} \alpha$ decrece a medida que crece x , entonces la curva correspondiente será convexa. El teorema 1 es la comprobación analítica de esta deducción. Del mismo modo se interpreta geoméricamente el teorema 1' (fig. 116).

Ejemplo 1. Determinar los intervalos de convexidad y de concavidad de la curva dada por la ecuación:

$$y = 2 - x^2,$$

Solución. La segunda derivada es

$$y'' = -2 < 0$$

para cualquier valor de x . Por consiguiente, la convexidad de la curva está dirigida hacia arriba en todos los puntos (fig. 117).

Ejemplo 2. Una curva está dada por la ecuación

$$y = e^x,$$

Puesto que:

$$y'' = e^x > 0,$$

para todos los valores de x , la curva es cóncava en todos los puntos, es decir, su convexidad está dirigida hacia abajo (fig. 118).

Ejemplo 3. Una curva está representada por la ecuación

$$y = x^3.$$

Puesto que:

$$y' = 6x$$

entonces $y' < 0$ para $x < 0$, e $y' > 0$ para $x > 0$. Por consiguiente, la convexidad de la curva está dirigida hacia arriba cuando $x < 0$ y hacia abajo, cuando $x > 0$ (fig. 119).

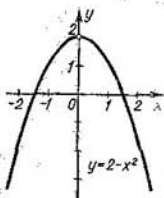


Fig. 117

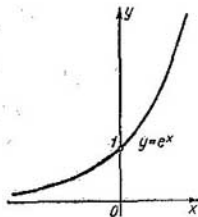


Fig. 118

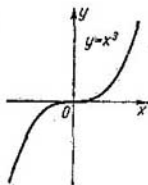


Fig. 119

Definición 2. El punto que en una curva continua separa la parte convexa de la cóncava, se llama *punto de inflexión* de la curva.

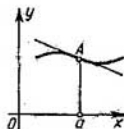


Fig. 120

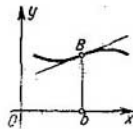


Fig. 121

En las figuras 119, 120 y 121 los puntos O, A y B son los puntos de inflexión.

Es evidente que en el punto de inflexión la tangente corta a la curva de modo que a un lado del punto la curva está situada por debajo de la tangente, y al otro lado, por encima de ésta.

Establezcamos ahora las condiciones suficientes para que el punto dado de la curva sea el de inflexión.

Teorema 2. Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva.

Si $f''(a) = 0$, o $f''(a)$ no existe, y la derivada $f''(x)$ cambia de signo al pasar por el valor $x = a$, entonces, el punto de la curva de abscisa $x = a$ es el punto de inflexión.

Demostración. 1) Sea $f''(x) < 0$ cuando $x < a$, y $f''(x) > 0$, cuando $x > a$. Entonces, para $x < a$ la curva es convexa y para $x > a$ es cóncava. Por tanto, el punto A de la curva, de abscisa $x = a$, es el punto de inflexión (fig. 120).

2) Si $f''(x) > 0$ cuando $x < b$, y $f''(x) < 0$, cuando $x > b$, entonces para $x < b$ la curva es cóncava y para $x > b$ es convexa. Por consiguiente el punto B de la curva de abscisa $x = b$ es el punto de inflexión (fig. 121).

Ejemplo 4. Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad y de concavidad de la curva

$$y = e^{-x^2} \text{ (curva de Gauss).}$$

Solución. 1) Hallemos las derivadas primera y segunda:

$$y' = -2xe^{-x^2},$$

$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2) La derivada segunda existe en todos los puntos. Hallemos los valores de x para los cuales $y'' = 0$:

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0,$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) Analicemos los valores obtenidos:

$$\text{para } x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' > 0,$$

$$\text{para } x > -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' < 0.$$

La segunda derivada cambia de signo al pasar por el punto x_1 , por tanto para $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ en la curva hay un punto de inflexión. Sus coordenadas son: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$;

$$\text{para } x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' < 0,$$

$$\text{para } x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tenemos } y'' > 0.$$

Por consiguiente, para $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en la curva también existe un punto

de inflexión, cuyas coordenadas son: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$. La existencia del segundo punto de inflexión se deduce también de la simetría de la curva respecto al eje Oy .

4) De lo anterior se deduce que:

para $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ la curva es cóncava

para $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ la curva es convexa

para $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ la curva es cóncava.

5) De la expresión de la primera derivada

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

se deduce que:

si $x < 0$, $y' > 0$, es decir, la función crece;

si $x > 0$, $y' < 0$, es decir, la función decrece;

si $x = 0$, $y' = 0$.

En este punto la función tiene un máximo, o bien $y = 1$.

Basándose en el estudio realizado es fácil construir la gráfica de la curva (fig. 122).

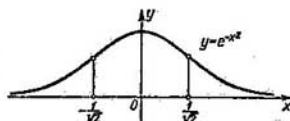


Fig. 122

Ejemplo 5. Analizar los puntos de inflexión de la curva

$$y = x^4.$$

Solución: 1) Hallemos la segunda derivada.

$$y'' = 12x^2.$$

2) Determinemos los puntos para los cuales $y'' = 0$:

$$12x^2 = 0, \quad x = 0.$$

3) Analicemos el valor obtenido de $x = 0$:

si $x < 0$, $y'' > 0$, la curva es cóncava;

si $x > 0$, $y'' > 0$, la curva es cóncava.

Por consiguiente, la curva no tiene puntos de inflexión (fig. 123).

Ejemplo 6. Analizar los puntos de inflexión de la curva

$$y = (x-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Solución. 1) Hallemos las derivadas primera y segunda:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}; \quad y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}.$$

2) La segunda derivada no se reduce a cero en ningún punto, pero tampoco existe cuando $x = 1$, ($y'' = \pm \infty$).

3) Analicemos el valor de $x = 1$:

si $x < 1$, $y'' > 0$, la curva es cóncava;

si $x > 1$, $y'' < 0$, la curva es convexa.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = 1$ que es punto $(1; 0)$.

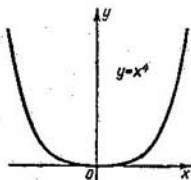


Fig. 123

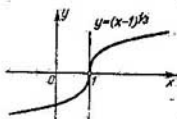


Fig. 124

Observemos que $y' = \infty$ cuando $x = 1$, es decir, la tangente a la curva en este punto es vertical (fig. 124).

§ 10. ASINTOTAS

Frecuentemente es preciso estudiar la forma de una curva $y = f(x)$, y, por tanto, la variación de la función correspondiente cuando la abscisa y la ordenada de un punto variable de la curva, juntas, o por separado *tienden al infinito* (según la magnitud absoluta). Aquí tiene especial importancia el caso en que la curva estudiada se aproxima indefinidamente a una recta, al tender el punto desplazable de la curva hacia el infinito*.

Definición. Si la distancia δ entre una recta A y el punto desplazable M de la curva tiende a cero, mientras que el punto M tiende al infinito, esta recta recibe el nombre de *asíntota* de la curva (figs. 125 y 126).

*) Se dice que el punto desplazable M se mueve a lo largo de una curva hacia infinito, si la distancia entre este punto y el origen de coordenadas crece indefinidamente.

Para estudios ulteriores vamos a distinguir las asíntotas *verticales* (paralelas al eje de ordenadas), de las *oblicuas* (no paralelas al eje de ordenadas).

I. Asíntotas verticales.

De la definición de asíntota se deduce que si $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, $\delta \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$, o bien $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, la recta $x = a$ es la asíntota de la curva $y = f(x)$. Recíprocamente, si la recta $x = a$ es una asíntota, se cumple una de estas igualdades.

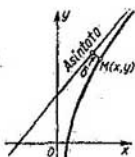


Fig. 125

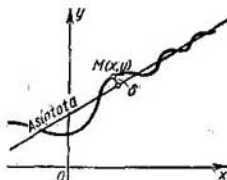


Fig. 126

Por consiguiente, para determinar las asíntotas verticales es preciso encontrar tales valores de $x = a$ que, al aproximarse a los mismos, la función tienda al infinito. En este caso la recta $x = a$ será asíntota vertical.

Ejemplo 1. La curva $y = \frac{2}{x-5}$ tiene una asíntota vertical $x=5$, puesto que $y \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 5$ (fig. 127).

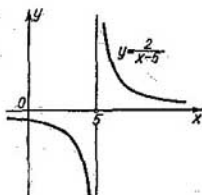


Fig. 127

Ejemplo 2. La curva $y = \operatorname{tg} x$ tiene infinidad de asíntotas verticales:

$$x = \pm \frac{\pi}{2}; \quad x = \pm \frac{3\pi}{2}; \quad x = \pm \frac{5\pi}{2}; \quad \dots$$

Esto se deduce de que $\operatorname{tg} x \rightarrow \infty$, cuando x tiende a los valores $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ o a los valores $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots$ (fig. 128).

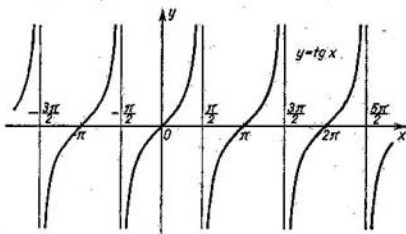


Fig. 128

Ejemplo 3. La curva $y = e^{\frac{1}{x}}$ tiene una asíntota vertical $x=0$, puesto que $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (fig. 129).

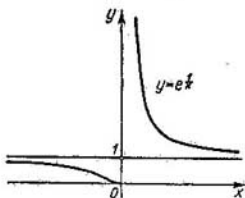


Fig. 129

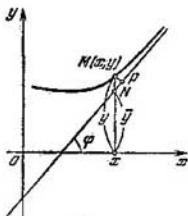


Fig. 130

II. Asíntotas oblicuas.

Supongamos que la curva $y = f(x)$ tiene una asíntota oblicua, cuya ecuación es:

$$y = kx + b. \quad (1)$$

Determinemos los números k y b (fig. 130). Sea $M(x, y)$ un punto de la curva y $N(x, \bar{y})$, un punto de la asíntota. La longitud del segmento MP es igual a la distancia entre el punto M y la asíntota. Según la hipótesis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} MP = 0. \quad (2)$$

Designando con φ el ángulo formado por la asíntota y el eje Ox , del $\triangle NMP$ hallamos:

$$NM = \frac{MP}{\cos \varphi}.$$

Puesto que φ es un ángulo invariable (diferente de $\frac{\pi}{2}$), según la igualdad anterior tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} NM = 0. \quad (2)$$

Recíprocamente, de la igualdad (2') se deduce la igualdad (2). Pero

$$NM = |QM - QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|,$$

la igualdad (2') toma la forma:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = 0. \quad (3)$$

Así que, si la recta (1) es una asíntota, se cumple la igualdad (3). Recíprocamente, si para k y b constantes se cumple la igualdad (3), la recta $y = kx + b$ será asíntota.

Determinemos ahora k y b . Despejando x en la igualdad (3), obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Puesto que $x \rightarrow +\infty$, debe cumplirse la igualdad

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Cuando b es constante, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0$. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k \right] = 0,$$

o sea

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (4)$$

Conociendo k , hallamos b de la igualdad (3):

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]. \quad (5)$$

De suerte que si la recta $y = kx + b$ es una asíntota, entonces k y b se encuentran según las fórmulas (4) y (5). Recíprocamente, si existen los límites (4) y (5), se cumple la igualdad (3) y la recta $y = kx + b$ es una asíntota. Si uno de los límites (4) y (5) no existe, la curva no tiene asíntota.

Observemos que hemos estudiado el problema referente a la figura 130, cuando $x \rightarrow +\infty$; sin embargo, todos los razonamientos son válidos también para el caso cuando $x \rightarrow -\infty$.

Ejemplo 4. Hallar las asíntotas de la curva

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

Solución: 1) Hallamos las asíntotas verticales:

cuando $x \rightarrow -0$, $y \rightarrow +\infty$;

cuando $x \rightarrow +0$, $y \rightarrow -\infty$.

Por consiguiente, la recta $x=0$ es una asíntota vertical.

2) Encontremos las asíntotas oblicuas

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right] = 1,$$

es decir,

$$k = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x} \right] = 2 \end{aligned}$$

o bien,

$$b = 2.$$

Por consiguiente, la recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua de la curva dada.

Para estudiar la disposición mutua de la asíntota y de la curva, examinemos la diferencia de las ordenadas de la curva y de la asíntota para un mismo valor de x :

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}.$$

La diferencia es negativa para $x > 0$, y positiva para $x < 0$; por tanto cuando $x > 0$, la curva está situada debajo de la asíntota, y cuando $x < 0$, encima de la asíntota (fig. 131).

Ejemplo 5. Hallar las asíntotas de la curva

$$y = e^{-x} \sin x + x.$$

Solución 1) Evidentemente no existen asíntotas verticales.

2) Las asíntotas oblicuas serán:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \operatorname{sen} x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x} \operatorname{sen} x}{x} + 1 \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} \operatorname{sen} x + x - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x = 0.$$

Por consiguiente, la recta

$$y = x$$

es una asíntota oblicua para $x \rightarrow +\infty$. La curva dada no tiene asíntota cuando $x \rightarrow -\infty$. En efecto, no existe $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x}$, puesto que $\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \operatorname{sen} x + 1$.

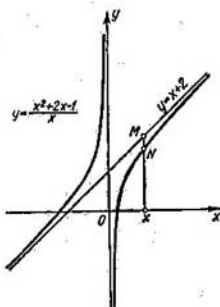


Fig. 131

(Aquí, el primer sumando crece indefinidamente cuando $x \rightarrow -\infty$, y, por tanto, no tiene límite).

§ 11. ESQUEMA GENERAL DEL ANÁLISIS DE FUNCIONES Y DE LA CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS

El análisis de funciones se reduce generalmente a la determinación de los siguientes elementos:

- 1) el dominio natural de definición de la función;
- 2) los puntos de discontinuidad de la función;
- 3) los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función;
- 4) los puntos de máximo y mínimo, así como los valores máximos y mínimos de la función;

5) los dominios de convexidad y concavidad de la gráfica y los puntos de inflexión;

6) las asíntotas de la gráfica de la función.

Este análisis permite construir la gráfica de la función (a veces resulta más conveniente trazar los elementos de la gráfica simultáneamente con el análisis).

Observación 1. Si la función estudiada $y = f(x)$ es *par*, es decir, es tal que el valor de la función no varía cuando el argumento cambia de signo, es decir, si:

$$f(-x) = f(x),$$

será suficiente analizar la función y construir su gráfica sólo para los valores positivos del argumento, pertenecientes al dominio de definición de la función. Para los valores negativos del argumento la gráfica de la función se construye teniendo en cuenta que una función par tiene su gráfica simétrica respecto al eje de ordenadas.

Ejemplo 1. La función $y = x^2$ es par, puesto que $(-x)^2 = (x)^2$ (véase fig. 5).

Ejemplo 2. La función $y = \cos x$ es par, puesto que $\cos(-x) = \cos(x)$ (véase fig. 16).

Observación 2. Si la función $y = f(x)$ es *impar*, es decir, que la función cambia de signo cuando varía el argumento, o sea, si:

$$f(-x) = -f(x),$$

será suficiente analizar la función para los valores positivos del argumento. La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Ejemplo 3. La función $y = x^3$ es impar, puesto que $(-x)^3 = -x^3$ (véase fig. 7).

Ejemplo 4. La función $y = \sin x$ es impar, puesto que $\sin(-x) = -\sin x$ (véase fig. 15).

Observación 3. Como el conocimiento de algunas propiedades de una función permite hacer conclusiones sobre las otras, a veces resulta conveniente elegir el orden del análisis partiendo de las particularidades de la función dada. Por ejemplo, si determinamos que la función dada es continua y derivable, y encontramos los puntos de máximo y mínimo de la misma, quedan determinados también los dominios de crecimiento y decrecimiento de la función.

Ejemplo 5. Analizar la función,

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

y construir su gráfica.

Solución. 1) El dominio de definición de la función es el intervalo $-\infty < x < +\infty$. Inmediatamente observamos que para $x < 0$ tenemos $y < 0$ y para $x > 0$ tenemos $y > 0$.

2) La función es continua en todos los puntos.

3) Analicemos los máximos y mínimos de la función partiendo de la ecuación

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Hallamos los puntos críticos

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Analicemos ahora la naturaleza de los puntos críticos:

cuando $x_1 < -1$ tenemos $y' < 0$;

cuando $x_1 > -1$ tenemos $y' > 0$.

Por tanto, la función tiene un mínimo cuando $x = -1$:

$$y_{\min} = (y)_{x=-1} = -0,5.$$

De igual manera:

cuando $x < 1$ tenemos $y' > 0$;

cuando $x > 1$ tenemos $y' < 0$.

Por tanto, la función tiene un máximo cuando $x = 1$:

$$y_{\max} = (y)_{x=1} = 0,5.$$

4) Determinemos los campos de crecimiento y decrecimiento de la función:

cuando $\begin{cases} -\infty < x < -1 & \text{tenemos } y' < 0: \text{ la función decrece;} \\ -1 < x < 1 & \text{tenemos } y' > 0: \text{ la función crece;} \\ 1 < x < +\infty & \text{tenemos } y' < 0: \text{ la función decrece.} \end{cases}$

5) Determinemos los campos de convexidad y concavidad de la curva y los puntos de inflexión partiendo de la ecuación

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

obtenemos:

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

Estudiando y'' como función de x , encontramos que:

para $-\infty < x < -\sqrt{3}$ tenemos $y'' < 0$: la curva es convexa;

para $-\sqrt{3} < x < 0$ tenemos $y'' > 0$: la curva es cóncava;

para $0 < x < \sqrt{3}$ tenemos $y'' < 0$: la curva es convexa;

para $\sqrt{3} < x < +\infty$ tenemos $y'' > 0$: la curva es cóncava.

Por tanto, el punto de coordenadas: $x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, es el de inflexión, lo mismo que los puntos $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

6) Hallemos las asíntotas de la curva:

para $x \rightarrow +\infty$ tenemos $y \rightarrow 0$;

para $x \rightarrow -\infty$ tenemos $y \rightarrow 0$.

Por consiguiente, la recta $y = 0$ es la única asíntota oblicua. La curva no tiene asíntotas verticales, puesto que no existe ningún valor finito de x para el cual la función tienda al infinito.

La gráfica de la curva estudiada está expuesta en la figura 132.

Ejemplo 6. Analizar la función

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$$

y construir su gráfica.

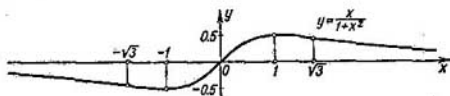


Fig. 132

Solución. 1) La función está definida para todos los valores de x .

2) La función es continua en todos los puntos.

3) Analicemos los máximos y los mínimos de la función:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a - x)^2}}$$

La derivada existe en todos los puntos a excepción de los siguientes:

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 2a.$$

Analicemos los valores límites de la derivada para $x \rightarrow -0$ y para $x \rightarrow +0$:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a + x)^2}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a + x)^2}} = +\infty$$

para $x < 0$ tenemos $y' < 0$, para $x > 0$ tenemos $y' > 0$.

Por tanto, la función tiene un mínimo cuando $x = 0$. El valor de la función en este punto es cero.

Estudiemos ahora la función en otro punto crítico $x_2 = 2a$. Si $x \rightarrow 2a$, la derivada también tiende al infinito. Sin embargo, en este caso, para todos los valores de x próximos a $2a$ (tanto a la derecha como a la izquierda del punto $2a$), la derivada es negativa. En consecuencia, en este punto la función no tiene máximo, ni mínimo. En el punto $x_2 = 2a$, como también en la proximidad de éste, la función decrece. La tangente a la curva en este punto es vertical.

Cuando $x = \frac{4a}{3}$ la derivada se reduce a cero. Estudiemos la naturaleza de este punto crítico. Analizando la expresión de la primera derivada, observemos que

$$\text{para } x < \frac{4a}{3} \text{ tenemos } y' > 0, \quad \text{para } x > \frac{4a}{3} \text{ tenemos } y' < 0.$$

Por tanto, la función tendrá un máximo para $x = \frac{4a}{3}$:

$$v_{\max} = \frac{2}{3} a \sqrt[3]{4}.$$

4) Utilizando los resultados del análisis efectuado obtenemos los campos de crecimiento y decrecimiento de la función:

para $-\infty < x < 0$ la función decrece;

para $0 < x < \frac{4a}{3}$ la función crece;

para $\frac{4a}{3} < x < +\infty$ la función decrece.

5) Hallemos los campos de convexidad y concavidad de la curva y puntos de inflexión: la segunda derivada

$$y'' = -\frac{8a^2}{9x^{\frac{4}{3}}(2a-x)^{\frac{5}{3}}}$$

no se reduce a cero en ningún punto. Sin embargo existen dos puntos en los que la segunda derivada es discontinua: los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 2a$.

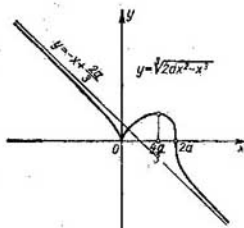


Fig. 133

Investiguemos el signo de la segunda derivada en la proximidad de cada uno de estos puntos: cuando $x < 0$ tenemos $y'' < 0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia arriba; cuando $x > 0$ tenemos $y'' < 0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia arriba.

Quiere decir que el punto de abscisa $x = 0$ no es el punto de inflexión. Cuando $x < 2a$ se tiene $y'' < 0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia arriba.

Cuando $x > 2a$ se tiene $y'' > 0$, y la curva tiene su convexidad dirigida hacia abajo.

Quiere decir que el punto $(2a; 0)$ de la curva es el de inflexión.

6) Hallemos las asíntotas de la curva

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2ax^2 - x^3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x}} - 1 = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^3} - x \sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x^3} = \frac{2a}{3}.$$

Por tanto, la recta

$$y = -x + \frac{2a}{3}$$

es una asíntota oblicua de la curva

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}.$$

La gráfica de la función estudiada se da en la fig. 133.

§ 12. ANALISIS DE LAS CURVAS DADAS EN FORMA PARAMETRICA

Sea la curva dada por ecuaciones paramétricas

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

En este caso el análisis y la construcción de la curva se efectúan de manera análoga a la que ha sido utilizada para la curva dada por la ecuación

$$y = f(x).$$

Primeramente calculamos las derivadas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi'(t). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Para los puntos de la curva en la proximidad de los cuales ésta sirve de gráfica de la función $y = f(x)$, calculamos la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (3)$$

Encontremos los valores del parámetro $t = t_1, t_2, \dots, t_k$ para los cuales por lo menos una de las derivadas, $\varphi'(t)$ o $\psi'(t)$, se reduce a cero o tiene discontinuidad. (Tales valores de t los llamaremos críticos). Según la fórmula (3), determinemos el signo de la derivada $\frac{dy}{dx}$ en cada uno de los intervalos $(t_1, t_2); (t_2, t_3); \dots; (t_{k-1}, t_k)$

y, por tanto, en cada uno de los intervalos (x_1, x_2) ; (x_2, x_3) ; ... (x_{h-1}, x_h) donde $x_i = \varphi(t_i)$. De esta manera quedan determinados los dominios de crecimiento y decrecimiento. Esto da la posibilidad de determinar la naturaleza de los puntos que corresponden a los valores del parámetro $t_1, t_2, \dots, t_h$. Luego calculamos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \quad (4)$$

Esta fórmula nos permite determinar la dirección de la convexidad en cada punto de la curva. Para hallar las asíntotas, encontramos tales valores de t , en cuya proximidad una de las variables, x o y , tienda al infinito y tales valores de t en cuya proximidad x e y tiendan al infinito. Después realizamos el estudio de la curva del modo habitual. Mostremos con ejemplos algunas particularidades del estudio de las curvas dadas en forma paramétrica.

Ejemplo 1. Analizar la curva dada por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos^3 t, \\ y &= a \sin^3 t. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Solución. Los valores x e y están determinados para todos los valores de t . Siendo periódicas las funciones $\cos^3 t$ y $\sin^3 t$ de período 2π , será suficiente considerar la variación del parámetro t en los límites de 0 hasta 2π . El segmento $[-a, a]$ es el dominio de definición tanto para x como para y . Por consiguiente, la curva estudiada no tiene asíntotas. Hallemos ahora:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a \cos^2 t \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a \sin^2 t \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Estas derivadas se reducen a cero, cuando $t=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Determinemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t. \quad (3')$$

Tomando en consideración las fórmulas (2') y (3') componemos la tabla siguiente.

Campo de variación de t	Campo de variación correspondiente de x	Campo de variación correspondiente de y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Carácter de variación de y en función de x ($y = f(x)$)
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	—	Decrece
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	Crece
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	—	Decrece
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	Crece

De la tabla se deduce que las ecuaciones (1') definen dos funciones continuas del tipo $y = f(x)$; para $0 \leq t \leq \pi$ tenemos $y \geq 0$ (véanse dos primeros renglones de la tabla), para $\pi < t \leq 2\pi$ tenemos $y < 0$ (véanse los últimos renglones de la tabla). De la fórmula (3') se deduce:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty.$$

En estos puntos la tangente a la curva es vertical. Hallemos ahora:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\pi} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=2\pi} = 0.$$

En estos puntos la tangente a la curva es horizontal. Calculemos ahora:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t}.$$

De aquí se deduce:

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

para $0 < t < \pi$, la curva es cóncava

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

para $\pi < t < 2\pi$ la curva es convexa.

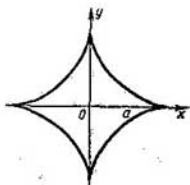


Fig. 134

Los resultados obtenidos permiten construir una curva correspondiente (fig. 134). Esta curva se llama *astroide*.

Ejemplo 2. Construir la curva dada por las ecuaciones (*folio de Descartes*)

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^3}{1+t^3}. \quad (1'')$$

Solución. Estas dos funciones están definidas para todos los valores de t , a excepción de $t = -1$, además:

$$\lim_{t \rightarrow -1-0} x = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1-0} y = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at^2}{1+t^3} = -\infty;$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1+0} y = +\infty.$$

Observemos ahora que

$$\text{para } t=0 \text{ es } x=0, y=0,$$

$$\text{para } t \rightarrow +\infty \text{ es } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0,$$

$$\text{para } t \rightarrow -\infty \text{ es } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0.$$

Hallemos $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6a \left(\frac{1}{2} - t^3 \right)}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \quad (2^*)$$

Para t obtenemos los siguientes valores críticos:

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad t_4 = \sqrt[3]{2}.$$

Hallemos ahora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t(2-t^3)}{2 \left(\frac{1}{2} - t^3 \right)}. \quad (3^*)$$

Utilizando las fórmulas (1*), (2*), (3*) componemos la tabla.

Campo de variación de t	Campo de variación correspondiente de x	Campo de variación correspondiente de y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Carácter de variación de y en función de x ($y = f(x)$)
$-\infty < t < -1$	$0 < x < +\infty$	$0 > y > -\infty$	-	Decrece
$-1 < t < 0$	$-\infty < x < 0$	$+\infty > y > 0$	-	Decrece
$0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0 < x < a\sqrt[3]{4}$	$0 < y < a\sqrt[3]{2}$	+	Crece
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4} > x > a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2} < y < a\sqrt[3]{4}$	-	Decrece
$\sqrt[3]{2} < t < +\infty$	$a\sqrt[3]{2} > x > 0$	$a\sqrt[3]{4} > y > 0$	+	Crece

De la fórmula (3*) se deduce:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\substack{t=0 \\ (x=0 \\ y=0)}} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\substack{t=\infty \\ (x=0 \\ y=0)}} = \infty.$$

Por tanto, la curva pasa por el origen de coordenadas dos veces: una vez, con la tangente paralela al eje Ox y la otra, con la tangente paralela al eje Oy .

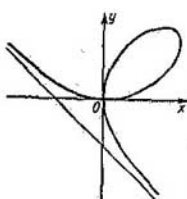
Ahora:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \left(x=a\sqrt[3]{\frac{4}{2}}\right) \\ \left(y=a\sqrt[3]{\frac{2}{2}}\right)}} = \infty.$$

En este punto la tangente a la curva es vertical.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\sqrt[3]{2} \\ \left(x=a\sqrt[3]{\frac{2}{2}}\right) \\ \left(y=a\sqrt[3]{\frac{4}{2}}\right)}} = 0.$$

En este punto la tangente a la curva es horizontal. Busquemos la asíntota:



$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \left[\frac{3at^2}{1+t^3} - (-1) \frac{3at}{1+t^3} \right] =$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1-0} \left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3} \right] = \lim_{t \rightarrow -1-0} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Por consiguiente la recta $y = -x - a$ es la asíntota de una rama de la curva para

$$x \rightarrow +\infty.$$

Fig. 135

De igual manera hallemos:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = -a.$$

Así, la recta $y = -x - a$ es la asíntota también de la rama de la curva para $x \rightarrow -\infty$.

Terminado el análisis podemos construir la curva (fig. 135).

Algunos problemas relacionados con el análisis de las curvas serán estudiados adicionalmente en el capítulo VIII, § 20. «Puntos singulares de una curva».

Ejercicios para el capítulo V

Hallar los extremos de las funciones: 1. $y = x^2 - 2x + 3$. Respuesta:

$y_{\min} = 2$ para $x = 1$. 2. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. Respuesta: $y_{\max} = \frac{7}{2}$ para $x = 1$.

3. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$. Respuesta: $y_{\max} = 10$ para $x = 1$, $y_{\min} = -22$ para

- $x=5$. 4. $y=-x^4+2x^2$. Respuesta: $y_{\max}=1$ para $x=\pm 1$, $y_{\min}=0$ para $x=0$. 5. $y=x^4-8x^2+2$. Respuesta: $y_{\max}=2$ para $x=0$, $y_{\min}=-14$ para $x=\pm 2$. 6. $y=3x^5-125x^3+2160x$. Respuesta: máx para $x=-4$ y $x=3$, mín para $x=-3$ y $x=4$. 7. $y=2-(x-1)^{2/3}$. Respuesta: $y_{\max}=2$ para $x=1$.
 8. $y=3-2(x+1)^{1/3}$. Respuesta: no hay máx ni mín. 9. $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. Respuesta: mín para $x=\sqrt{2}$, máx para $x=-\sqrt{2}$. 10. $y=\frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$. Respuesta: máx para $x=\frac{12}{5}$. 11. $y=2e^x+e^{-x}$. Respuesta: mín para $x=-\frac{\ln 2}{2}$.
 12. $y=\frac{x}{\ln x}$. Respuesta: $y_{\min}=e$ para $x=e$. 13. $y=\cos x+\sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$). Respuesta: $y_{\max}=\sqrt{2}$ para $x=\frac{\pi}{4}$. 14. $y=\sin 2x-x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$). Respuesta: máx para $x=\frac{\pi}{6}$, mín para $x=-\frac{\pi}{6}$. 15. $y=x+\operatorname{tg} x$. Respuesta: no hay máx, ni mín. 16. $y=e^x \sin x$. Respuesta: mín para $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$, máx para $x=2k\pi+\frac{3}{4}\pi$. 17. $y=x^4-2x^2+2$. Respuesta: máx para $x=0$; dos mínimos para $x=-1$ y $x=1$. 18. $y=(x-2)^3(2x+1)$. Respuesta: $y_{\min} \approx -8,24$ para $x=\frac{1}{8}$. 19. $y=x+\frac{1}{x}$. Respuesta: mín para $x=1$; máx para $x=-1$. 20. $y=x^2(a-x)^2$. Respuesta: $y_{\max}=\frac{a^4}{16}$ para $x=\frac{a}{2}$; $y_{\min}=0$ para $x=0$ y para $x=a$. 21. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$. Respuesta: máx para $x=\frac{a^2}{a-b}$; mín para $x=\frac{a^2}{a+b}$. 22. $y=x+\sqrt{1-x}$. Respuesta: $y_{\max}=\frac{5}{4}$ para $x=\frac{3}{4}$; $y_{\min}=-1$ para $x=-1$. 23. $y=x\sqrt{1-x}$ ($x \leq 1$). Respuesta: $y_{\max}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ para $x=\frac{2}{3}$. 24. $y=\frac{x}{1+x^2}$. Respuesta: mín para $x=-1$, máx para $x=1$.
 25. $y=x \ln x$. Respuesta: mín para $x=\frac{1}{e}$. 26. $y=x \ln^2 x$. Respuesta: máx para $x=e^{-\frac{1}{2}}$; mín para $x=1$. 27. $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$. Respuesta: Función va creciendo. 28. $y=\sin 3x-3 \sin x$. Respuesta: mín para $x=\frac{\pi}{2}$; máx para $x=\frac{3\pi}{2}$. 29. $y=2x+\operatorname{arctg} x$. Respuesta: no hay extremos. 30. $y=\sin x \cos^2 x$. Respuesta: mín para $x=\frac{\pi}{2}$; dos máximos: para $x=\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ y para $x=\arccos(-\sqrt{\frac{2}{3}})$. 31. $y=\arcsen(\sin x)$. Respuesta: máx para $x=\frac{(4m+1)\pi}{2}$; mín para $x=\frac{(4m+3)\pi}{2}$.

Hallar los valores máximos y mínimos de las funciones en los segmentos indicados:

32. $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ ($-2 \leq x \leq 2$). Respuesta: $y_{\max} = 2$ para $x = \pm 1$, $y_{\min} = -25$ para $x = \pm 2$.

33. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ ($-1 \leq x \leq 5$). Respuesta: $y_{\max} = \frac{23}{3}$ para $x = 5$, $y_{\min} = -\frac{13}{3}$ para $x = -1$.

34. $y = \frac{x-1}{x+1}$ ($0 \leq x \leq 4$). Respuesta: $y_{\max} = \frac{3}{5}$ para $x = 4$, $y_{\min} = -1$ para $x = 0$. 35. $y = \sin 2x - x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$). Respuesta: $y_{\max} = \frac{\pi}{2}$ para $x = -\frac{\pi}{2}$, $y_{\min} = -\frac{\pi}{2}$ para $x = \frac{\pi}{2}$.

36. Con una hojalata cuadrada de lado a es preciso hacer un cajón abierto por arriba que tenga el volumen máximo. Se recortan cuadrados en los ángulos de la hojalata y se dobla ésta para formar el cajón. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

Respuesta: $a/6$.

37. Demostrar que de todos los rectángulos que puedan inscribirse en un círculo dado el cuadrado tiene el área máxima. Demostrar que el cuadrado tendrá también el perímetro máximo.

38. Demostrar que de todos los triángulos isósceles inscritos en un círculo dado un triángulo equilátero tendrá el perímetro máximo.

39. Hallar un triángulo rectangular del área máxima cuya hipotenusa es h . Respuesta: la longitud de cada cateto es igual a $h/\sqrt{2}$.

40. Hallar la altura de un cilindro recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R .

Respuesta: la altura es igual a $2R/\sqrt{3}$.

41. Hallar la altura de un cilindro recto que tenga la superficie lateral máxima, inscrito en una esfera de radio R . Respuesta: la altura es igual a $R\sqrt{2}$.

42. Hallar la altura de un cono recto de volumen mínimo, circunscrito alrededor de una esfera de radio R . Respuesta: la altura es igual a $4R$ (el volumen del cono es igual a dos volúmenes de la esfera).

43. El interior de un recipiente con el fondo cuadrado y abierto por arriba debe revestirse con plomo. Si el volumen del recipiente es igual a 32 lit, ¿cuáles deben ser sus dimensiones para que sea mínima la cantidad de plomo?

Respuesta: la altura es 0,2 m; el lado de la base es 0,4 m (es decir, el lado de la base debe ser dos veces mayor que la altura).

44. Un techador quiere fabricar un canalón abierto de capacidad máxima. El fondo y los costados del canalón deben ser de 10 cm de ancho, además los costados han de estar igualmente inclinados respecto al fondo. ¿Cuál debe ser la anchura del canalón por arriba?

Respuesta: 20 cm.

45. Demostrar que un pabellón cónico de capacidad dada requiere una cantidad mínima de tela cuando su altura es $\sqrt{2}$ veces mayor que el radio de la base.

46. Hace falta fabricar un cilindro abierto por arriba, cuyas paredes y el fondo tengan un espesor dado. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del cilindro para que, dada la capacidad, sea mínima la cantidad de material utilizado?

Respuesta: Si R es el radio interior de la base y v , el volumen interior del cilindro, entonces: $R = \sqrt[3]{v/\pi}$.

47. Es preciso fabricar una caldera, compuesta de un cilindro y dos fondos semiesféricos, con paredes de espesor constante, de modo que con el volumen dado v tenga una superficie exterior mínima.

Respuesta: la caldera debe tener la forma de una esfera con radio interior R , igual a $\sqrt[3]{3v/4\pi}$.

48. Construir un trapecio isósceles que, dada el área S , tenga un perímetro mínimo; el ángulo en la base del trapecio es α . *Respuesta:* el largo del lado lateral es igual a $\sqrt{S/\sin \alpha}$.

49. Inscribir en una esfera de radio R un prisma triangular regular de volumen máximo.

Respuesta: la altura del prisma es igual a $2R/\sqrt{3}$.

50. Circunscribir alrededor de una semiesfera de radio R un cono de volumen mínimo; el plano de la base del cono coincide con el de la base de la semiesfera; hallar la altura del cono.

Respuesta: la altura del cono es igual a $R\sqrt{3}$.

51. Circunscribir alrededor de un cilindro de radio r un cono recto de volumen mínimo; suponiendo que coinciden los planos y los centros de las bases circulares del cilindro y del cono. *Respuesta:* el radio de la base del cono es igual a $\frac{3r}{2}$.

52. Cortar un segmento de una hoja circular de radio R . Este segmento debe ser tal que al enrollarlo se obtenga un embudo de capacidad máxima.

Respuesta: el ángulo central del segmento es igual a $2\pi\sqrt{2/3}$.

53. Hallar el cilindro del volumen máximo entre todos los cilindros redondos inscritos en un cubo dado con arista a de tal modo que sus ejes coincidan con la diagonal del cubo y las circunferencias de las bases toquen las caras del mismo. *Respuesta:* la altura del cilindro es igual a $a\sqrt{3/3}$, el radio de la base es igual a $a/\sqrt{6}$.

54. Sea dado un punto (x_0, y_0) que se halla en el primer cuadrante en el sistema rectangular de coordenadas. Trazar por este punto una recta, de manera que forme un triángulo de área mínima con las direcciones positivas de los ejes de coordenadas.

Respuesta: la recta corta en los ejes los segmentos: $2x_0$ y $2y_0$, es decir, tiene la ecuación $\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$.

55. Sea dado un punto, en el eje de la parábola $y^2 = 2px$ a la distancia a del vértice. Hallar la abscisa del punto de la curva más próximo al punto dado.

Respuesta: $x = a - p$.

56. La solidez de una barra de sección rectangular es directamente proporcional a la anchura y al cubo de altura. Hallar el ancho de la barra de máxima solidez que podría ser cortada de un tronco de madera de 16 cm de diámetro.

Respuesta: la anchura es igual a 8 cm.

57. Un torpedero se encuentra anclado a 9 km del punto más próximo de la costa. Es preciso enviar un mensajero a un campamento militar situado a 15 km del punto de la tierra más próximo al torpedero, contando a lo largo de la costa; el mensajero, andando a pie hace 5 km/hora y remando, 4 km/hora.

¿En qué punto de la costa debo desembarcarse el mensajero para llegar al campamento en el tiempo mínimo posible?

Respuesta: A 3 km del campamento.

58. Un punto se desplaza por un plano en un medio, dispuesto fuera de la línea MN , a la velocidad v_1 y por la línea MN , con la v_2 .

¿Que camino debe pasar el punto para desplazarse de la posición A a la B , situada en la línea MN , en un tiempo mínimo? La distancia entre el punto

A y la línea MN es igual a h ; la distancia entre la proyección α del punto A sobre la línea MN , y el punto B es igual a a .

Respuesta: Si ACB es el trayecto del punto, tenemos:

$$\frac{\alpha C}{AC} = \frac{v_1}{v_2} \text{ cuando } \frac{\alpha B}{AB} > \frac{v_1}{v_2}, \text{ y } \alpha C = \alpha B, \text{ cuando } \frac{\alpha B}{AB} < \frac{v_1}{v_2}.$$

59. Una carga w se eleva mediante una palanca, siendo F la fuerza aplicada a un extremo de ésta; el punto de apoyo se encuentra en el otro extremo de la misma. Si la carga está colgada en el punto que se halla a la distancia a cm del de apoyo y cada centímetro lineal de la palanca pesa v gramos ¿cuál debe ser la longitud de la palanca para que la fuerza necesaria para elevar la carga sea mínima?

Respuesta: $x = \sqrt{2aw/v}$ cm.

60. Realizadas n mediciones de una magnitud incógnita x , se han obtenido las lecturas: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Demostrar que la suma de los cuadrados de los errores $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ será la mínima, si se toma por x el número $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$.

61. Para disminuir cuanto sea posible la fricción del líquido contra las paredes de un canal, el área mojada por el agua debe ser mínima. Demostrar que la mejor forma del canal rectangular abierto de área dada de sección transversal, es aquella en que el ancho del canal es dos veces mayor que su altura.

Hallar los puntos de inflexión, los intervalos de convexidad y concavidad de las curvas.

62. $y = x^5$. Respuesta: para $x < 0$, la curva es convexa, es cóncava para $x > 0$; hay punto de inflexión para $x = 0$.

63. $y = 1 - x^3$. Respuesta: La curva es convexa en todos los puntos.

64. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. Respuesta: hay punto de inflexión para $x = 1$.

65. $y = (x - b)^3$. Respuesta: hay punto de inflexión para $x = b$.

66. $y = x^4$. Respuesta: la curva es cóncava en todos los puntos.

67. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Respuesta: hay punto de inflexión para $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

68. $y = \operatorname{tg} x$. Respuesta: hay punto de inflexión para $x = n\pi$.

69. $y = xe^{-x}$. Respuesta: hay punto de inflexión para $x = 2$.

70. $y = a - \sqrt{x - b}$. Respuesta: hay punto de inflexión para $x = b$.

71. $y = a - \sqrt{(x - b)^3}$. Respuesta: la curva no tiene el punto de inflexión.

Hallar las asíntotas de las curvas siguientes:

72. $y = \frac{1}{x-1}$. Respuesta: $x = 1$; $y = 0$. 73. $y = \frac{1}{(x+2)^3}$. Respuesta: $x = -2$;

$y = 0$. 74. $y = c + \frac{a^2}{(x-b)^2}$. Respuesta: $x = b$, $y = c$. 75. $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$. Respuesta:

$x = 0$; $y = 0$. 76. $y = \ln x$. Respuesta: $x = 0$. 77. $y^3 = 6x^2 + x^3$. Respuesta:

$y = x + 2$. 78. $y^3 = a^3 - x^3$. Respuesta: $y + x = 0$. 79. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. Respuesta:

$x = 2a$. 80. $y^2(x - 2a) = x^3 - a^3$. Respuesta: $x = 2a$, $y = \pm (x + a)$.

Analizar las funciones y construir sus gráficas:

81. $y = x^4 - 2x + 10$. 82. $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$. 83. $y = e^{-\frac{1}{x}}$. 84. $y = \frac{6x}{1 + x^2}$. 85. $y =$

$-\frac{4+x}{x^2}$. 86. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$. 87. $y = \frac{x+2}{x^3}$. 88. $y = \frac{x^3}{1+x}$. 89. $y^2 = x^3 - x$. 90. $y =$

$-\frac{x^3}{3-x^2}$. 91. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$. 92. $y = x - \sqrt[3]{x^3 + 1}$. 93. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. 94. $y = xe^{-x}$.

95. $y = x^2 e^{-x^2}$. 96. $y = x - \ln(x+1)$. 97. $y = \ln(x^2+1)$. 98. $y = \sin 3x$.
 99. $y = x + \sin x$. 100. $y = x \sin x$. 101. $y = e^{-x} \sin x$. 102. $y = \ln \sin x$.
 103. $y = \frac{\ln x}{x}$. 104. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{2}t. \end{cases}$ 105. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$ 106. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$
 107. $\begin{cases} x = ae^t \cos t, \\ y = ae^t \sin t. \end{cases}$

Problemas complementarios

Hallar las asíntotas de las líneas:

108. $y = \frac{x^2+1}{1+x}$. Respuesta: $x = -1$; $y = x - 1$. 109. $y = x + e^{-x}$. Respuesta:
 $y = x$. 110. $2y(x+1)^2 = x^3$. Respuesta: $x = -1$; $y = \frac{1}{2}x - 1$. 111. $y^3 = a^3 - x^2$.
 Respuesta: $x + y = 0$. 112. $y = e^{-2x} \sin x$. Respuesta: $y = 0$. 113. $y = e^{-x} \sin 2x + x$.
 Respuesta: $y = x$. 114. $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$. Respuesta: $x = -\frac{1}{e}$; $y = x + \frac{1}{e}$.
 115. $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$. Respuesta: $x = 0$, $y = x$. 116. $x = \frac{2t}{1-t^2}$, $y = \frac{t^2}{1-t^2}$. Respuesta:
 $y = \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Estúdiense las funciones y constrúyanse sus gráficas:

117. $y = |x|$. 118. $y = \ln|x|$. 119. $y^2 = x^3 - x$. 120. $y = (x+1)^2(x-2)$. 121. $y =$
 $= x + |x|$. 122. $y = \sqrt[3]{x^3} - x$. 123. $y = x^2 \sqrt{x+1}$. 124. $y = \frac{x^2}{2} - \ln x$. 125. $y =$
 $= \frac{x^3}{2} \ln x$. 126. $y = \frac{1}{e^x - 1}$. 127. $y = \frac{x}{\ln x}$. 128. $y = x + \frac{\ln x}{x}$. 129. $y = x \ln x$.
 130. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$. 131. $y = |\sin 3x|$. 132. $y = \frac{\sin x}{x}$. 133. $y = x \operatorname{arctg} x$. 134. $y =$
 $= x - 2 \operatorname{arctg} x$. 135. $y = e^{-2x} \sin 3x$. 136. $y = |\sin x| + x$. 137. $y = \sin(x^2)$.
 138. $y = \cos^3 x + \sin^3 x$. 139. $y = \frac{x+|x|}{2}$. 140. $y = \frac{x-|x|}{2}$. 141. $y =$
 $= \sin\left(\frac{x+|x|}{2}\right) - \frac{x-|x|}{2}$ ($-\pi \leq x \leq \pi$). 142. $y = \cos\left(\frac{x-|x|}{2}\right) - \frac{x+|x|}{2}$
 $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 1\right)$. 143. $y = \frac{1}{2}(3x + |x|) + 1$. 144. $y = \frac{1}{2}[3(x-1) + |x-1|] + 1$
 $(0 \leq x \leq 2)$.

CURVATURA DE UNA CURVA

§ 1. LONGITUD DEL ARCO Y SU DERIVADA

Supongamos que un arco de la curva M_0M (fig. 136) sea la gráfica de la función $y = f(x)$, definida en el intervalo (a, b) . Determinemos la longitud del arco de la curva. Tomemos en la curva AB los puntos $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M$. Uniendo con rectas los puntos tomados, obtenemos una línea quebrada

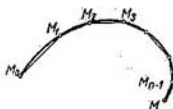


Fig. 136

$M_0M_1M_2 \dots M_{i-1}M_i \dots M_{n-1}M$, inscrita en el arco M_0M . Designemos por P_n la longitud de esta línea quebrada.

El límite (lo indiquemos con s), al cual tiende la longitud de la línea quebrada cuando tiende a cero la longitud del segmento más grande $M_{i-1}M_i$, se llama la *longitud del arco* M_0M , si este límite existe y no depende de la elección de los puntos en la línea quebrada $M_0M_1M_2 \dots M_{i-1}M_i \dots M_{n-1}M$. Observamos que la definición de la longitud del arco de una curva arbitraria es análoga a la de longitud de una circunferencia.

En el capítulo XII demostraremos que, si en el segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas el arco de la curva $y = f(x)$, comprendido entre los puntos $[a; f(a)]$ y $[b; f(b)]$, tiene una longitud bien determinada. En el mismo capítulo se demostrará el modo de calcular esta longitud. También será establecido (como corolario) que en las condiciones dadas la razón de la longitud de cualquier arco de esta curva a la longitud de la cuerda respectiva

tiende a 1, cuando la longitud de cuerda tiende a 0:

$$\lim_{M_0M \rightarrow 0} \frac{\text{long. } \widehat{M_0M}}{\text{long. } \overline{M_0M}} = 1.$$

Este teorema puede ser fácilmente comprobado para la circunferencia*, sin embargo, en el caso general, lo tomaremos ahora sin demostración.

Estudiemos el problema siguiente. Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva en un plano.

Sea $M_0(x_0, y_0)$ un punto fijo de la curva, y $M(x, y)$, un punto desplazable de la misma. Designemos por s la longitud del arco M_0M (fig. 138).

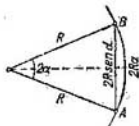


Fig. 137

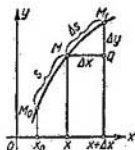


Fig. 138

Al variar la abscisa x del punto M varía también la longitud s del arco, es decir, s es una función de x . Calculemos la derivada s con respecto a x .

Daremos a x un incremento Δx . Entonces el arco s recibirá un incremento $\Delta s = \text{long. } \widehat{MM_1}$. Sea $\overline{MM_1}$ la cuerda de este arco. Para determinar $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$, procedamos de la manera siguiente: del triángulo $\triangle MM_1Q$ encontramos:

$$\overline{MM_1}^2 (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Multipliquemos y dividamos por Δs^2 el primer miembro:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} \right)^2 \Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

*) Consideremos el arco AB , cuyo ángulo central es igual a 2α (fig. 137). La longitud de este arco es igual a $2R\alpha$ (R es el radio de la circunferencia) y la de su cuerda es igual a $2R \sin \alpha$. Por eso:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{long. } \widehat{AB}}{\text{long. } \overline{AB}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2R\alpha}{2R \sin \alpha} = 1.$$

Dividamos por Δx^2 todos los términos de la igualdad:

$$\left(\frac{MM_1}{\Delta s}\right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Encontremos los límites de los miembros primero y segundo cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Teniendo en cuenta que $\lim_{\substack{MM_1 \rightarrow 0 \\ \Delta s}} \frac{MM_1}{\Delta s} = 1$ y $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, obtenemos: $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
o sea

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (1)$$

Obtenemos la siguiente expresión para la diferencial de un arco:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2)$$

o bien*

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (2')$$

Hemos obtenido la expresión de la diferencial de la longitud de un arco cuando la curva se da por la ecuación $y = f(x)$. Sin embargo, la fórmula (2') es válida también cuando la curva se representa mediante ecuaciones paramétricas.

Si las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

entonces:

$$dx = \varphi'(t) dt, \quad dy = \psi'(t) dt,$$

y la expresión (2') toma la forma $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$.

§ 2. CURVATURA

Uno de los elementos que caracterizan la forma de una curva es el grado de su curvatura. Supongamos que existe una curva que no se corta y tiene una tangente bien determinada en cada uno de sus puntos. Tracemos las tangentes a la curva en dos puntos arbitrarios A y B , y designemos por α el ángulo formado por estas tangentes

*) Razonando estrictamente, la fórmula (2') es válida sólo cuando $dx > 0$. Si $dx < 0$, entonces $dx = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Por eso, en general, será más justo escribir esta fórmula del modo siguiente: $|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

o (con mayor exactitud), el ángulo de giro de la tangente cuando ésta pasa del punto A al punto B (fig. 139). Este ángulo se llama *ángulo de contingencia* del arco AB . De los dos arcos de una misma longitud, será el más encorvado el que tiene mayor ángulo de contingencia (fig. 139, 140).

Por otra parte, es evidente que no se puede determinar el grado de curvatura de los arcos de diferente longitud considerando sólo



Fig. 139

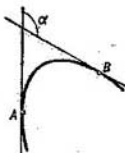


Fig. 140



Fig. 141

sus ángulos de contingencia. Por consiguiente, la característica completa de la curvatura de una curva será la razón del ángulo de contingencia a la longitud del arco correspondiente.

Definición 1. La razón del ángulo de contingencia correspondiente α respecto a la longitud del arco se llama *curvatura media*

K_{med} del arco $\widehat{AB}$: $K_{\text{med}} = \frac{\alpha}{\widehat{AB}}$.

La curvatura media de diferentes arcos (partes) de una curva puede ser diferente. Así, por ejemplo, la curvatura media de los

arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{A_1B_1}$ de la curva expuesta en la figura 141 es diferente; aunque las longitudes de estos arcos son iguales. Mas aún su grado de curvatura varía de un punto al otro. Para caracterizar el grado de curvatura de la curva dada en la proximidad inmediata del punto A , introduzcamos la noción de curvatura de la curva en el punto dado.

Definición 2. El límite de la curvatura media del arco $\widehat{AB}$, cuando la longitud del mismo tiende a cero (es decir, cuando el punto B se aproxima* al punto A) se llama *curvatura* K_A de la curva en el punto dado A :

$$K_A = \lim_{B \rightarrow A} K_{\text{med}} = \lim_{\widehat{AB} \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\widehat{AB}}.$$

*) Se supone que el valor del límite no depende de la dirección en que se toma en la curva el punto desplazable B respecto al punto A .

Ejemplo. Para una circunferencia de radio r : 1) determinar la curvatura media del arco $\widehat{AB}$, correspondiente al ángulo central α (fig. 142); 2) determinar la curvatura en el punto A .

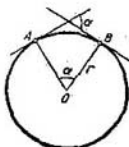


Fig. 142

Solución: 1) Es evidente que el ángulo de contingencia del arco $\widehat{AB}$ es igual a α y la longitud del arco es igual a αr . Por tanto:

$$K_{\text{med}} = \frac{\alpha}{\alpha \cdot r}$$

o sea

$$K_{\text{med}} = \frac{1}{r}.$$

2) La curvatura en el punto A es igual a

$$K = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}.$$

Así pues, la curvatura media del arco de una circunferencia de radio r no depende de la longitud y posición del arco; para todos los arcos es igual a $\frac{1}{r}$. La curvatura de la circunferencia en un punto cualquiera tampoco depende de la posición del punto y es igual a $\frac{1}{r}$.

Observación. Notemos que la curvatura de una curva arbitraria puede, generalmente, variar de un punto al otro, como lo veremos más abajo.

§ 3. CÁLCULO DE LA CURVATURA

Deduzcamos la fórmula para calcular la curvatura de una curva en cada uno de sus puntos $M(x, y)$. Supongamos que la curva está dada en el sistema de coordenadas rectangulares por la ecuación:

$$y = f(x), \quad (1)$$

y que la función $f(x)$ tiene la segunda derivada continua.

Tracemos las tangentes a la curva en los puntos M y M_1 , cuyas abscisas son x y $x + \Delta x$, respectivamente, y designemos con φ y $\varphi + \Delta\varphi$ los ángulos formados por estas tangentes y el eje Ox (fig. 143).

Designemos por s la longitud del arco $\widehat{M_0M}$, calculado a partir de un punto dado M_0 . Entonces $\Delta s = \widehat{M_0M_1} - \widehat{M_0M}$ y $|\Delta s| = \widehat{MM_1}$.

Como se ve en la figura 143, el ángulo de contingencia que corresponde al arco $\widehat{MM_1}$ es igual al valor absoluto* de la diferencia entre los ángulos φ y $\varphi + \Delta\varphi$, es decir, es igual a $|\Delta\varphi|$.

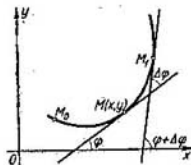


Fig. 143

Conforme a la definición de la curvatura media de una curva en el segmento MM_1 , tenemos:

$$K_{\text{med}} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

Para determinar la curvatura en el punto M es preciso hallar el límite de esta expresión cuando la longitud del arco $\widehat{MM_1}$ tiende a cero:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

Puesto que φ y s dependen de x (son funciones de x), entonces, φ se puede considerar como una función de s y suponer que esta función se ha dado por las ecuaciones paramétricas mediante el parámetro x . En este caso:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

y, por tanto,

$$K = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|. \quad (2)$$

*) Es evidente que para la curva dada en la figura 143 $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$, puesto que $\Delta\varphi > 0$.

Para calcular $\frac{d\varphi}{ds}$ utilicemos la fórmula de derivación de funciones paramétricas:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$

Para expresar la derivada $\frac{d\varphi}{dx}$ a través de la función $y = f(x)$, observemos que $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$ y, por tanto,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}.$$

Derivando la última igualdad con respecto a x tenemos:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Para la derivada $\frac{ds}{dx}$, hemos encontrado en el § 1, cap. VI,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

De donde

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}},$$

y, dado $K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$, obtenemos en definitiva:

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (3)$$

Por consiguiente, en cualquier punto de la curva, donde existe y es continua la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ se puede calcular la curvatura, utilizando la fórmula (3). Observemos que calculando la curvatura de una curva, conviene tomar sólo el valor aritmético (positivo) de la raíz en el denominador puesto que, según la definición, la curvatura de una curva no puede ser negativa.

Ejemplo 1. Determinar la curvatura de la parábola $y^2 = 2px$:

a) en un punto arbitrario $M(x, y)$;

b) en el punto $M_1(0, 0)$;

c) en el punto $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Solución. Hallar las derivadas primera y segunda de la función $y = \sqrt{2px}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Poniendo las expresiones obtenidas en la fórmula (3), obtenemos:

$$a) \quad K = \frac{p^2}{(2px + p^2)^{3/2}};$$

$$b) \quad K_{x=0, y=0} = \frac{1}{p};$$

$$c) \quad K_{x=\frac{p}{2}, y=p} = \frac{1}{2\sqrt{2p}}.$$

Ejemplo 2. Determinar la curvatura de la recta $y = ax + b$ en un punto arbitrario (x, y) .

Solución.

$$y' = a, \quad y'' = 0.$$

En virtud de la fórmula (3), obtenemos:

$$K = 0.$$

Así la recta es una curva de curvatura cero. El mismo resultado se puede sacar inmediatamente de la definición de curvatura.

§ 4. CÁLCULO DE LA CURVATURA DE UNA CURVA DADA EN FORMA PARAMÉTRICA

Sea una curva dada en forma paramétrica:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Entonces (§ 24, cap. III):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (3) del párrafo antecedente, tenemos:

$$K = \frac{|\psi''\phi' - \psi'\phi''|}{[\phi'^2 + \psi'^2]^{3/2}}. \quad (1)$$

Ejemplo: Determinar la curvatura de la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

en un punto arbitrario (x, y) .

Solución

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a \cos t.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (3), obtenemos:

$$\begin{aligned} K &= \frac{|a(1 - \cos t) a \cos t - a \sin t \cdot a \sin t|}{|a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t|^{3/2}} = \frac{|\cos t - 1|}{2^{3/2} a (1 - \cos t)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{2^{3/2} (1 - \cos t)^{3/2}} = \frac{1}{4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|}. \end{aligned}$$

§ 5. CALCULO DE LA CURVATURA DE UN CURVA DADA EN COORDENADAS POLARES

Sea la curva dada por la ecuación del tipo

$$\rho = f(\theta). \quad (1)$$

Escribamos las fórmulas de paso de las coordenadas polares a las de Descartes:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Si en estas fórmulas sustituimos ρ por su expresión en función de θ , es decir, por $f(\theta)$, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\theta) \cos \theta, \\ y &= f(\theta) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Estas ecuaciones se pueden considerar como ecuaciones paramétricas de la curva (1), en las cuales θ sirve de parámetro.

Entonces:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \cos \theta - 2 \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta - \rho \cos \theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \sin \theta + 2 \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta.$$

Introduciendo las últimas expresiones en la fórmula (1) del párrafo anterior, obtenemos la fórmula para calcular la curvatura de una curva en coordenadas polares:

$$K = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Ejemplo. Determinar la curvatura de la espiral de Arquímedes

$$\rho = a\theta \quad (a > 0)$$

en un punto arbitrario (fig. 144).

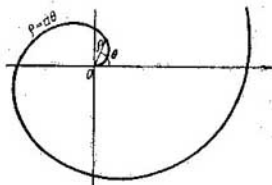


Fig. 144

Solución.

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a; \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0.$$

Por tanto,

$$K = \frac{|a^2\theta^2 + 2a^2|}{(a^2\theta^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a} \frac{\theta^2 + 2}{(\theta^2 + 1)^{3/2}}.$$

Observemos que para valores grandes de θ se cumplen las ecuaciones aproximadas:

$$\frac{\theta^2 + 2}{\theta^2} \approx 1, \quad \frac{\theta^2 + 1}{\theta^2} \approx 1.$$

Por eso, sustituyendo en la fórmula antecedente, $\theta^2 + 2$ por θ^2 , y $\theta^2 + 1$ por θ^2 , obtenemos la fórmula aproximada (para valores grandes de θ):

$$K \approx \frac{1}{a} \frac{\theta^2}{(\theta^2)^{3/2}} = \frac{1}{a\theta}.$$

De este modo, la espiral de Arquímedes para valores grandes de θ , tiene aproximadamente la misma curvatura que una circunferencia de radio $a\theta$.

§ 6. RADIO Y CIRCULO DE CURVATURA.
CENTRO DE CURVATURA. EVOLUTA Y EVOLVENTE

Definición. La magnitud R , recíproca a la curvatura K de una curva en un punto dado M , se denomina *radio de curvatura* de la curva en este punto de que se trata:

$$R = \frac{1}{K}, \quad (1)$$

o sea,

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}. \quad (2)$$

Tracemos por el punto M de la curva (fig. 145) la normal dirigida hacia la concavidad de aquella y marquemos en esta normal un segmento MC igual al radio R de curvatura de la curva en el punto M .

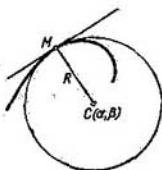


Fig. 145

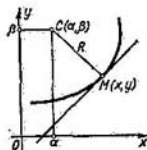


Fig. 146

El punto C se llama *centro de curvatura* de esta curva en el punto M ; el círculo de radio R y centro en el punto C (que pasa por el punto M), se denomina *círculo de curvatura* de la curva dada en el punto M .

De la definición de círculo de curvatura se deduce que en el punto dado la curvatura de la curva es igual a la del círculo de curvatura.

Obtenemos las fórmulas que determinan las coordenadas del centro de curvatura.

Sea una curva dada por la ecuación

$$y = f(x), \quad (3)$$

fijemos en la curva un punto $M(x, y)$ y determinemos las coordenadas α y β del centro de curvatura correspondiente al punto elegido

(fig. 146). Escribamos la ecuación de la normal a la curva en el punto M :

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x). \quad (4)$$

(Aquí, X e Y son coordenadas corrientes de un punto de la normal).

Puesto que el punto C (α , β) está situado en la normal, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (4):

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x). \quad (5)$$

Luego, la distancia entre el punto C (α , β) y el M (x , y) es igual al radio R de curvatura:

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2. \quad (6)$$

Resolviendo juntamente las ecuaciones (5) y (6), hallamos α y β :

$$(\alpha - x)^2 + \frac{1}{y'^2}(\alpha - x)^2 = R^2,$$

$$(\alpha - x)^2 = \frac{y'^2}{1 + y'^2} R^2;$$

de donde: $\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} R$, $\beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} R$, y, dado que:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}, \text{ tenemos: } \alpha = x \pm \frac{y'(1 + y'^2)}{|y''|}, \quad \beta = y \mp \frac{1 + y'^2}{|y''|}.$$

Para decidir qué signos (superiores o inferiores) debemos tomar en las últimas fórmulas, conviene examinar el caso: $y'' > 0$ y $y'' < 0$. Si $y'' > 0$, la curva es cóncava en este punto y, por tanto, $\beta > y$ (fig. 146), por consiguiente, debemos tomar los signos inferiores. Tomando en cuenta que en este caso $|y''| = y''$, las fórmulas de las coordenadas del centro de curvatura serán:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \\ \beta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

De modo análogo se puede demostrar que las fórmulas (7) se verifican también en el caso de $y'' < 0$.

Si la curva está dada por ecuaciones paramétricas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

las coordenadas del centro de curvatura se obtienen con facilidad de las fórmulas (7), sustituyendo en éstas y' e y'' por sus expresiones en función del parámetro:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad y'' = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}.$$

Entonces,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \\ \beta &= y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la parábola

$$y^2 = 2px$$

a) en un punto arbitrario $M(x, y)$; b) en el punto $M_0(0, 0)$; c) en el punto $M_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Solución. Introduciendo los valores de $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ en las fórmulas (7), tenemos (fig. 147):

$$a) \quad \alpha = 3x + p, \quad \beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}};$$

$$b) \quad \text{para } x=0 \text{ encontramos: } \alpha=p, \quad \beta=0;$$

$$c) \quad \text{para } x=\frac{p}{2} \text{ tenemos: } \alpha=\frac{5p}{2}, \quad \beta=-p.$$

Si la curvatura en el punto $M_1(x, y)$ no es igual a cero, al punto mencionado le corresponde un centro de curvatura bien determinado: $C_1(\alpha, \beta)$. El conjunto de todos los centros de curvatura de la curva dada forma una curva nueva, llamada *evoluta* de la curva estudiada.

De este modo, el lugar geométrico de los centros de curvatura se llama *evoluta de la curva*. La curva estudiada, con relación a su evoluta, se llama *evolvente* o *involuta* (o *desarrollo*).

Si la curva dada está representada por la ecuación $y = f(x)$, entonces las ecuaciones (7) se pueden considerar como ecuaciones paramétricas de la evoluta con el parámetro x . Eliminando en las ecuaciones dadas el parámetro x (si es posible), obtenemos la expresión de la dependencia directa entre las coordenadas corrientes

Así, pues,

$$\alpha = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \cos^3 t.$$

De modo análogo:

$$\beta = \left(b - \frac{a^2}{b}\right) \sin^3 t.$$

Eliminando el parámetro t , obtenemos la ecuación de la evoluta de la elipse:

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{\beta}{a}\right)^{2/3} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{2/3}.$$

Aquí, α y β son coordenadas corrientes de la evoluta (fig. 149).

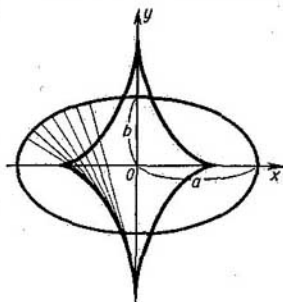


Fig. 149

Ejemplo 4. Hallar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de una cicloide:

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t).$$

Solución.

$$x' = a(1 - \cos t); \quad y' = a \sin t;$$

$$x'' = a \sin t; \quad y'' = -a \cos t.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas en la fórmula (7') tenemos

$$\alpha = a(t + \sin t),$$

$$\beta = -a(1 - \cos t).$$

Transformemos las variables, haciendo:

$$\alpha = \xi - \pi a,$$

$$\beta = \eta - 2a,$$

$$t = \tau - \pi.$$

Las ecuaciones de la evoluta tomarán la forma:

$$\xi = a(\tau - \operatorname{sen} \tau),$$

$$\eta = a(1 - \cos \tau).$$

Estas últimas determinan en las coordenadas ξ, η una cicloide generada por el mismo círculo de radio a . De este modo, la evoluta de una cicloide es la misma cicloide, pero desplazada en $-\pi a$ por el eje Ox y en $-2a$, por el eje Oy (fig. 150).

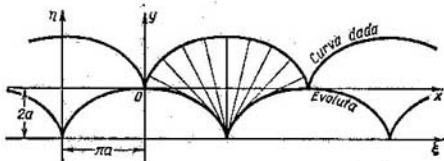


Fig. 150

§ 7. PROPIEDADES DE LA EVOLUTA

Teorema 1. *La normal a la curva dada es tangente a su evoluta.*

Demostración. El coeficiente angular de la tangente a la evoluta, determinada por las ecuaciones paramétricas (7') del párrafo antecedente, es igual a:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\frac{d\beta}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}}.$$

Notemos que [en virtud de las mismas ecuaciones (7')]

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{3y'^2y'' - y'y''' - y^3y'''}{y'^2} = -y' \frac{3y'y'' - y''' - y^2y'''}{y'^2}, \quad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = -\frac{3y''y' - y''' - y'^2y'''}{y'^2}, \quad (2)$$

de donde obtenemos la correlación:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{y'}.$$

Pero y' es el coeficiente angular de la tangente a la curva en el punto correspondiente; por tanto, de la correlación obtenida se deduce que la tangente a la curva es perpendicular a la tangente

a la evoluta de esta curva en el punto correspondiente, es decir, la normal a la curva es tangente a la evoluta de esta curva.

Teorema 2. Si el radio de curvatura varía uniformemente sobre cierto segmento M_1M_2 de la curva (es decir, sólo crece o sólo decrece), el incremento de la longitud del arco de la evoluta en este segmento de la curva es igual (en valor absoluto) al incremento correspondiente del radio de curvatura de esta curva.

Demostración. En virtud de la fórmula (2') § 1 cap. VI, tenemos:

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

donde, ds es la diferencial de la longitud del arco de la evoluta; de aquí se tiene: $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2$.

Introduciendo en esta ecuación las expresiones (1) y (2), tenemos:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2) = \left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y'^2}\right)^2. \quad (3)$$

Hallemos ahora $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$. Puesto que

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \text{ se tiene } R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}.$$

Derivando ambos miembros de esta igualdad con respecto a x y realizando las transformaciones correspondientes, obtenemos:

$$2R \frac{dR}{dx} = \frac{2(1 + y'^2)^2 (3y'y''^2 - y''' - y'^2y''')}{(y''^2)^3}. \text{ Dividiendo ambos miembros de la igualdad por } 2R = \frac{2(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \text{ obtenemos: } \frac{dR}{dx} = \frac{(1 + y'^2)^{1/2} (3y'y''^2 - y''' - y'^2y''')}{y''^3}.$$

Elevando al cuadrado:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2) \left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \quad (4)$$

Comparando las ecuaciones (3) y (4):

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

de donde

$$\frac{dR}{dx} = \mp \frac{ds}{dx}.$$

Según la hipótesis, $\frac{dR}{dx}$ no cambia de signo (R sólo crece, o decrece), por consiguiente, $\frac{ds}{dx}$ conserva su signo. Tomemos (para mayor precisión del razonamiento): $\frac{dR}{dx} \leq 0$, $\frac{ds}{dx} \geq 0$ (lo que corresponde a la fig. 151). Por consiguiente, $\frac{dR}{dx} = -\frac{ds}{dx}$. Sean x_1 y x_2 las abscisas de los puntos M_1 y M_2 . Apliquemos el teorema de Cauchy para las funciones $s(x)$ y $R(x)$ en el segmento $[x_1, x_2]$:

$$\frac{s(x_2) - s(x_1)}{R(x_2) - R(x_1)} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi}}{\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=\xi}} = -1,$$

donde, ξ es un número comprendido entre x_1 y x_2 ($x_1 < \xi < x_2$). Introduzcamos las siguientes designaciones (fig. 151):

$$s(x_2) = s_2, \quad s(x_1) = s_1, \quad R(x_2) = R_2, \quad R(x_1) = R_1.$$

Entonces, $\frac{s_2 - s_1}{R_2 - R_1} = -1$, ó $s_2 - s_1 = -(R_2 - R_1)$. Esto significa que

$$|s_2 - s_1| = |R_2 - R_1|.$$

De la misma manera se demuestra esta ecuación cuando el radio de curvatura crece.

Hemos demostrado los teoremas 1 y 2 para el caso de la curva dada por una ecuación explícita $y = f(x)$. Estos teoremas son válidos también cuando la curva está dada por ecuaciones paramétricas. Su demostración es absolutamente análoga.

Observación. Mostremos un procedimiento mecánico elemental para construir la curva (evolvente) siguiendo su evoluta.

Sea una regla flexible encorvada en forma de la evoluta C_0C_5 (fig. 152). Imaginemos un hilo inextensible que contornea esta regla y uno de los extremos del hilo está fijado en el punto C_0 . Si desenrollamos este hilo, manteniéndolo siempre bien tenso, su otro extremo describirá una curva M_5M_0 , que será la evolvente.

§ 8. CÁLCULO APROXIMADO DE LAS RAÍCES REALES DE UNA ECUACION

Los métodos del análisis de la variación de funciones permiten calcular los valores aproximados de las raíces de la ecuación

$$f(x) = 0,$$

Si ésta es una ecuación algebraica*) de primero, segundo, tercero o cuarto grado, existen también las fórmulas que permiten expresar las raíces de la ecuación en función de sus coeficientes, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces. Para las ecuaciones de grado superior al cuarto las fórmulas de tal índole, en caso general, no existen. Si los coeficientes de cualquier ecuación, algebraica o no, (trascendente), son numéricos, sus raíces pueden ser aproximadamente calculadas con cualquier grado de precisión. Observemos que, incluso cuando las raíces de la ecuación algebraica se expresan mediante radicales, en la práctica, es a veces más conveniente aplicar métodos aproximados para resolver las ecuaciones. He aquí algunos métodos del cálculo aproximado de las raíces de una ecuación.

1. Método de las cuerdas. Sea dada la ecuación

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

donde $f(x)$ es una función continua, derivada dos veces en el segmento $[a, b]$. Supongamos que analizando la función $y = f(x)$ dentro del segmento $[a, b]$ definimos otro segmento $[x_1, x_2]$ dentro del cual la función es monótona (creciente o decreciente) y en los extremos los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen signos contrarios. Para expresarse con más precisión supongamos que $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ (fig. 154). Puesto que la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[x_1, x_2]$, su gráfica cortará el eje Ox en un punto, situado entre x_1 y x_2 .

Tracemos la cuerda AB que une los extremos de la curva $y = f(x)$, correspondientes a las abscisas x_1 y x_2 . Entonces, la abscisa a_1 del punto de intersección de la cuerda con el eje Ox será el valor aproximado de la raíz (fig. 155).

Para obtener este valor aproximado, escribamos la ecuación de la recta AB , que pasa por los puntos dados $A[x_1, f(x_1)]$ y $B[x_2, f(x_2)]$: $\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Puesto que $y = 0$ para $x = a_1$, por tanto:

$$\frac{-f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{a_1 - x_1}{x_2 - x_1},$$

*) La ecuación $f(x) = 0$ se llama *algebraica*, si $f(x)$ es un polinomio (véase § 6, cap. VII).

de donde

$$a_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \quad (2)$$

Para determinar el valor más exacto de la raíz hallamos $f(a_1)$. Si $f(a_1) < 0$, repetimos el mismo procedimiento, aplicando la fórmula (2) al segmento $[a_1, x_2]$. Si $f(a_1) > 0$, aplicamos la fórmula

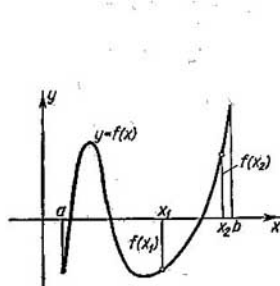


Fig. 154

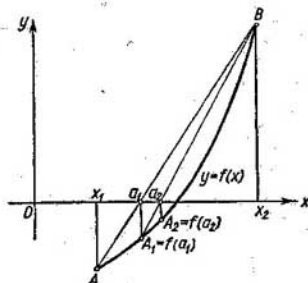


Fig. 155

mencionada para el segmento $[x_1, a_1]$. Utilizando este procedimiento unas cuantas veces, obtenemos, evidentemente, los valores cada vez más precisos de la raíz a_2, a_3 , etc.

Ejemplo 1. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0.$$

Solución. Hallemos ante todo los segmentos en que la función $f(x)$ es monótona. El resultado del cálculo de la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6,$$

muestra que ésta es positiva para $x < -\sqrt{2}$, negativa para $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$, y de nuevo positiva para $x > \sqrt{2}$ (fig. 156). Así, la función tiene tres segmentos de monotonía dentro de cada uno de los cuales se halla una raíz. Para simplificar los cálculos ulteriores, haremos más estrechos estos segmentos de monotonía, pero de modo que en cada segmento siga permaneciendo la raíz correspondiente. Para esto, variando al azar los valores de x en la expresión de $f(x)$, encontremos dentro de cada segmento de monotonía otros más pequeños, en cuyos extremos la función tenga signos contrarios:

$$\left. \begin{array}{ll} x_1 = 0, & f(0) = 2, \\ x_2 = 1, & f(1) = -3, \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{ll} x_3 = -3, & f(-3) = -7, \\ x_4 = -2, & f(-2) = 6, \\ x_5 = 2, & f(2) = -2, \\ x_6 = 3, & f(3) = 11. \end{array} \right\}$$

De este modo, las raíces se encuentran en los intervalos:

$$(0; 1), (-3; -2), (2; 3).$$

Determinemos el valor aproximado de la raíz en el intervalo $(0; 1)$; según la fórmula (2) tenemos:

$$a_1 = 0 - \frac{(1-0) \cdot 2}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Puesto que $f(0,4) = 0,4^3 - 6 \cdot 0,4 + 2 = -0,336$, $f(0) = 2$, la raíz se encuentra comprendida entre 0 y 0,4. Aplicando de nuevo la fórmula (2) para el intervalo, obtenemos el siguiente valor aproximado:

$$a_2 = 0 - \frac{(0,4-0) \cdot 2}{-0,336-2} = \frac{0,8}{2,336} = 0,342, \text{ etc.}$$

De modo análogo se hallan los valores aproximados de las raíces en otros intervalos.

2. Método de tangentes (Método de Newton). Supongamos de nuevo que $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, y que en el segmento $[x_1, x_2]$ la primera derivada no cambia de signo. En este caso, en el intervalo (x_1, x_2) se halla una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Supongamos, además, que la segunda derivada tampoco cambia de signo en el segmento $[x_1, x_2]$, lo que puede lograrse, reduciendo el intervalo que contiene la raíz. El hecho de que la segunda derivada no cambia el signo en el segmento $[x_1, x_2]$ significa que la curva es sólo convexa o cóncava en este segmento.

Tracemos una tangente a la curva en el punto B (fig. 157). La abscisa a_1 del punto de intersección de la tangente con el eje Ox será el valor aproximado de la raíz buscada. Para encontrar esta abscisa, escribamos la ecuación de la tangente en el punto B:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2).$$

Notamos que, si $y = 0$, $x = a_1$, obtenemos:

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \quad (3)$$

Tracemos luego una tangente en el punto B_1 y de modo análogo obtengamos un valor más preciso de la raíz a_2 . Repitiendo este pro-

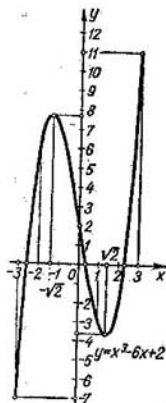


Fig. 156

cedimiento unas cuantas veces, podemos calcular el valor aproximado de la raíz con cualquier grado de precisión que se desee.

Observemos la circunstancia siguiente. Si trazáramos la tangente a la curva no en el punto B , sino en el A , podría resultar que el punto de intersección de la tangente con el eje Ox se encontrara

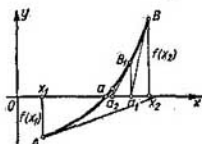


Fig. 157

fuera del intervalo (x_1, x_2) . Se ve claramente en las figuras 157 y 158 que la tangente debe trazarse en aquel extremo del arco donde coinciden los signos de la función y de su segunda derivada. Según la hipótesis, la segunda derivada conserva su signo en el segmento

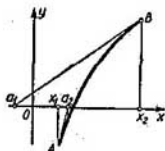


Fig. 158

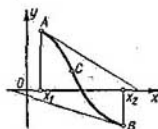


Fig. 159

$[x_1, x_2]$. Por consiguiente los signos de la función y de la segunda derivada coinciden obligatoriamente en uno de los extremos. Esta regla es también válida para el caso en que $f'(x) < 0$. Si la tangente se traza por el extremo izquierdo del intervalo, es preciso sustituir x_2 por x_1 en la fórmula (3):

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (3)$$

Si en el interior del intervalo (x_1, x_2) se encuentra un punto de inflexión C , el método de tangentes puede dar un valor aproximado de la raíz, situado fuera del intervalo (x_1, x_2) (fig. 159).

Ejemplo 2. Apliquemos la fórmula (3) para calcular la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$, comprendida en el intervalo $(0; 1)$. Tenemos:

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = (3x^2 - 6) \big|_{x=0} = -6.$$

Por eso, según la fórmula (3) obtenemos:

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0,333.$$

3. Método combinado (fig. 160). Si en el segmento $[x_1, x_2]$ aplicamos simultáneamente los métodos de las cuerdas y de las tangentes, obtenemos dos puntos a_1 y $\bar{a}_1$, situados a ambos lados de la raíz buscada α (puesto que $f(a_1)$ y $f(\bar{a}_1)$ tienen signos contrarios).

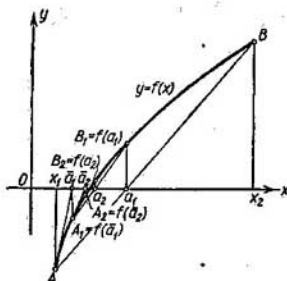


Fig. 160

Luego aplicamos los métodos de cuerdas y de tangentes en el segmento $[a_1, \bar{a}_1]$. Como resultado obtenemos dos números, a_2 y $\bar{a}_2$, aún más próximos al valor de la raíz. Procedemos de esta manera hasta que la diferencia entre los valores aproximados hallados sea menor que el grado necesario de precisión.

Notemos que aplicando el método combinado, nos aproximamos a la raíz buscada por los dos lados a la vez (es decir, encontramos simultáneamente tanto el valor aproximado por exceso, como por defecto).

Para ilustrar esta deducción en el ejemplo 2 podemos convencernos, mediante la sustitución, que $f(0,333) > 0$, $f(0,342) < 0$. Por consiguiente, el valor de la raíz está comprendido entre los valores aproximados:

$$0,333 < x < 0,342.$$

Ejercicios para el capítulo VI

Hallar la curvatura de las curvas en los puntos indicados: 1. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en los puntos $(0, b)$ y $(a, 0)$. Respuesta: $\frac{b}{a^2}$ en el punto $(0, b)$; $\frac{a}{b^2}$ en el punto $(a, 0)$. 2. $xy=12$ en el punto $(3, 4)$. Respuesta: $24/125$. 3. $y=x^3$ en el punto (x_1, y_1) . Respuesta: $\frac{6x_1}{(1+9x_1^2)^{3/2}}$. 4. $16y^2=4x^4-x^6$ en el punto $(2, 0)$. Respuesta: $\frac{1}{2}$. 5. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ en el punto arbitrario.

Respuesta: $\frac{1}{3} (axy)^{\frac{1}{3}}$.

Hallar el radio de curvatura de las curvas en los puntos indicados; trazar cada curva y construir el círculo de curvatura correspondiente. 6. $y^2=x^3$ en el punto $(4, 8)$. Respuesta: $R=80\sqrt{10/3}$. 7. $x^2=4ay$ en el punto $(0, 0)$. Respuesta: $R=2a$. 8. $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ en el punto (x_1, y_1) . Respuesta: $R=\frac{(b^4x_1+a^4y_1)^{3/2}}{a^4b^4}$. 9. $y=\ln x$ en el punto $(1, 0)$. Respuesta: $R=2\sqrt{2}$.

10. $y=\sin x$ en el punto $(\pi/2, 1)$. Respuesta: $R=1$. 11. $\left. \begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array} \right\} \text{ para } t=t_1$. Respuesta: $R=3a \sin t_1 \cos t_1$.

Hallar el radio de curvatura de las curvas: 12. $\left. \begin{array}{l} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{array} \right\} \text{ para } t=1$. Respuesta: $R=6$. 13. La circunferencia $\rho=a \sin \theta$. Respuesta: $R=a/2$. 14. La espiral de Arquímedes $\rho=a\theta$. Respuesta: $R=\frac{(\rho^2+a^2)^{3/2}}{\rho^2+2a^2}$. 15. La cardiode $\rho=a(1-\cos \theta)$. Respuesta: $R=\frac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$. 16. La lemniscata $\rho^2=a^2 \cos 2\theta$. Respuesta: $R=\frac{a^2}{3\rho}$. 17. La parábola $\rho=a \sec^2 \frac{\theta}{2}$. Respuesta: $R=2a \sec^3 \frac{\theta}{2}$. 18. $\rho=a \sin^3 \frac{\theta}{3}$. Respuesta: $R=\frac{3}{4}a \sin^3 \frac{\theta}{3}$.

Hallar los puntos de las curvas en los que el radio de curvatura tenga un valor mínimo: 19. $y=\ln x$. Respuesta: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$. 20. $y=e^x$. Respuesta: $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 21. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. Respuesta: $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$. 22. $y=a \ln\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$. Respuesta: En el punto $(0, 0)$ $R=a/2$.

Hallar las coordenadas del centro de curvatura (α, β) y las ecuaciones de la evoluta para cada una de las curvas siguientes:

23. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Respuesta: $\alpha=\frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$; $\beta=-\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$. 24. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. Respuesta: $\alpha=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$; $\beta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. 25. $y^3=a^2x$. Respuesta: $\alpha=\frac{a^4+15y^4}{6a^2y}$; $\beta=\frac{a^4y-9y^5}{2a^4}$. 26. $\left\{ \begin{array}{l} x=3t, \\ y=t^2-6. \end{array} \right.$ Respuesta: $\alpha=-\frac{4}{3}t^3$;

$$\beta = 3t^2 - \frac{3}{2}. \quad 27. \quad \begin{cases} x = k \ln \cotg \frac{t}{2} - k \cos t, \\ y = k \sen t. \end{cases} \quad \text{Respuesta: } y = \frac{k}{2} (e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}})$$

(tractriz).

$$28. \quad \begin{cases} x = a (\cos t + t \sen t) \\ y = a (\sen t - t \cos t) \end{cases}, \quad \text{Respuesta: } \alpha = a \cos t; \beta = a \sen t. \quad 29. \quad \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sen^3 t. \end{cases}$$

Respuesta: $\alpha = a \cos^3 t + 3a \cos t \sen^2 t$; $\beta = a \sen^3 t + 3a \cos^2 t \sen t$. 30. Calcular las raíces de la ecuación $x^3 - 4x + 2 = 0$ con la precisión de hasta 0,001. Respuesta: $x_1 = 1,675$, $x_2 = 0,539$, $x_3 = -2,214$. 31. Calcular el valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x) = x^6 - x - 0,2 = 0$ comprendida en el intervalo (1; 1,4). Respuesta: 1,045. 32. Calcular las raíces de la ecuación $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$, con precisión de hasta 0,01. Respuesta: $0,38 < x_1 < 0,39$; $1,24 < x_2 < 1,25$. 33. Calcular el valor aproximado de la ecuación $x^3 - 5 = 0$.

$$\text{Respuesta: } x_1 \approx 1,71, x_{2,3} = 1,71 \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \quad 34. \text{ Hallar el valor aproximado}$$

de la raíz de la ecuación $x - \tg x = 0$ comprendida entre 0 y $\frac{3\pi}{2}$. Respuesta: 4,4935. 35. Hallar la raíz aproximada de la ecuación $\sen x = 1 - x$ con precisión de 0,001.

Indicación: Redúzcase la ecuación a la forma $f(x) = 0$. Respuesta: $0,5110 < x < 0,5111$.

Problemas

36. Demostrar que la curvatura en cada punto de la lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ es proporcional al radio vector de este punto.

37. Hallar el valor máximo del radio de curvatura de la curva $\rho = a \sen^3 \frac{\varphi}{3}$. Respuesta: $R = \frac{3a}{4}$.

38. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la curva $y = x \ln x$ en el punto, en que $y' = 0$. Respuesta: $(e^{-1}, 0)$.

39. Comprobar que para los puntos de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ el valor de la diferencia entre el radio vector y el radio de curvatura tiende a 0, cuando $\varphi \rightarrow \infty$.

40. Hallar la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que tiene en el punto $(\frac{\pi}{2}, 1)$ una tangente y curvatura comunes con la sinusoide $y = \sen x$. Construir la gráfica. Respuesta: $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}$.

41. La función $y = f(x)$ está definida del modo siguiente:

$$f(x) = x^3 \text{ en el intervalo } -\infty < x \leq 1$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ en el intervalo } 1 < x < +\infty.$$

¿Cuáles deben ser a , b , c para que la línea $y = f(x)$ tenga la curvatura continua en todos los puntos? Construir la gráfica. Respuesta: $a = 3$, $b = -3$, $c = 1$.

42. Demostrar que el radio de curvatura de una cicloide en cualesquiera de sus puntos es dos veces mayor que la normal en el mismo punto.

43. Escribir la ecuación de la circunferencia de curvatura de la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). Respuesta: $(x+4)^2 + (y-\frac{7}{2})^2 = \frac{125}{4}$.

44. Escribir la ecuación de la circunferencia de curvatura de la curva $y = \operatorname{tg} x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$. *Respuesta:* $\left(x - \frac{\pi - 10}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$.

45. Hallar la longitud total de la evoluta de una elipse cuyos semiejes son iguales a a y b . *Respuesta:* $4(a^3 - b^3)/ab$.

46. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación $xe^x = 2$, con precisión de hasta 0,01. *Respuesta:* La ecuación tiene la única raíz real: $x \approx 0,84$.

47. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación $x \ln x = -0,8$ con precisión de hasta 0,01. *Respuesta:* La ecuación tiene la única raíz real: $x \approx 1,64$.

48. Hallar los valores aproximados de las raíces de la ecuación $x^2 \operatorname{arctg} x = 1$ con precisión de hasta 0,001. *Respuesta:* La ecuación tiene la única raíz real: $x \approx 1,096$.

NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

§ 1. NUMEROS COMPLEJOS. GENERALIDADES

Se llama *número complejo* a toda expresión de la forma

$$a + bi, \quad (1)$$

donde, a y b son números reales; i es la *unidad llamada imaginaria*, definida por las ecuaciones:

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{ó} \quad i^2 = -1; \quad (2)$$

a es la parte *real* y bi , parte *imaginaria* del número complejo. Dos números complejos $a + bi$ y $a - bi$ que se diferencian sólo por el signo de su parte imaginaria se llaman *conjugados*.

Si $a = 0$, el número $0 + bi = bi$, es un número *puramente imaginario*; si $b = 0$, se obtiene un número real $a + 0 \cdot i = a$.

Aceptemos dos concepciones fundamentales:

1) dos números complejos, $a_1 + b_1i$ y $a_2 + b_2i$ se consideran iguales, si:

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$$

es decir, si son iguales sus partes reales e imaginarias por separado;

2) un número complejo es igual a cero:

$$a + bi = 0,$$

siempre que $a = 0$, $b = 0$.

1. Representación geométrica de los números complejos. Todo número complejo $a + bi$ puede ser representado sobre el plano Oxy mediante un punto $A(a, b)$, de coordenadas a y b (fig. 161). Recíprocamente, todo punto $M(a, b)$ del plano Oxy puede considerarse como la imagen geométrica del número complejo $a + bi$.

Pero, si a todo punto $A(a, b)$ corresponde algún número complejo $a + bi$, se puede decir, en particular, que a todo punto del eje Ox le corresponde un número real ($b = 0$). Todo punto del eje Oy

representa un número puramente imaginario, puesto que en este caso $a = 0$. Por eso, representando los números complejos sobre un plano, el eje Oy se llama *eje imaginario* y el Ox , *eje real*.

Uniendo el punto $A(a, b)$ con el origen de coordenadas, obtenemos el vector $\overline{OA}$. En algunos casos es muy conveniente considerar el vector $\overline{OA}$ como la representación geométrica del número complejo $a + bi$.

2. Forma trigonométrica de los números complejos. Designemos por φ y r ($r \geq 0$) las coordenadas polares del punto $A(a, b)$,

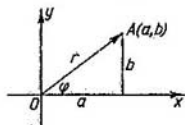


Fig. 161

tomando por polo el origen de coordenadas y por eje polar, la dirección positiva del eje Ox . En este caso (fig. 161), tenemos las expresiones siguientes:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

y, por tanto, el número complejo puede ser representado en la forma:

$$a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (3)$$

La expresión representada por el segundo miembro se llama forma trigonométrica del número complejo $a + bi$. Las magnitudes r y φ se expresan en función de a y b mediante las fórmulas:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \text{Arctg} \frac{b}{a}.$$

El número r se llama *módulo* y φ , *argumento* del número complejo $a + bi$.

El argumento de un número complejo, es decir, el ángulo φ , es positivo, cuando se toma a partir de la dirección positiva del eje Ox en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y es negativo, cuando se calcula en dirección opuesta. Es evidente que el argumento φ no se determina de una manera unívoca, sino con precisión igual al valor del sumando $2\pi k$; donde k es cualquier número entero.

El módulo r del número complejo $a + bi$ se designa a veces por el símbolo $|a + bi|$:

$$r = |a + bi|.$$

Notemos que todo número real A también puede escribirse en la forma (3), o bien:

$$A = |A| (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) \text{ cuando } A > 0$$

$$A = |A| (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \text{ cuando } A < 0.$$

El módulo del número complejo 0 es igual a cero: $|0| = 0$. Como argumento de cero se puede tomar cualquier ángulo φ . En efecto, para todo ángulo φ tiene lugar la igualdad:

$$0 = 0 \cdot (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

§ 2. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

1. Adición. La suma de dos números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$, es un número complejo definido por la ecuación:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i. \quad (1)$$

De la fórmula (1) se deduce que la adición de los números complejos, representados en forma de vectores, se efectúa según la regla de adición de vectores.

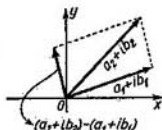


Fig. 162

2. Sustracción. La diferencia de dos números complejos, $a_2 + b_2 i$ y $a_1 + b_1 i$, es un número complejo que, adicionado a $a_1 + b_1 i$, da $a_2 + b_2 i$.

Es fácil ver que:

$$(a_2 + b_2 i) - (a_1 + b_1 i) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) i. \quad (2)$$

Observemos que el módulo de la diferencia de dos números complejos $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$ es igual a la distancia entre los puntos que representan estos números en el plano de la variable compleja (fig. 162).

3. Multiplicación. El producto de los números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$, multiplicados estos números como binomios, según las reglas algebraicas, es un número complejo. Hay que tener

en cuenta que:

$$i^2 = -1; i^3 = (-1)i = -i; i^4 = (-i)(i) = -i^2 = 1; i^5 = 1 \cdot i, \text{ etc.}$$

y, en general, para k entero:

$$i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i; i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = -i.$$

En virtud de esta regla tenemos:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2,$$

ó

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i. \quad (3)$$

Si los números complejos están expresados en forma trigonométrica, tenemos:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) &= \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &\quad + i \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + i^2 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2] = \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2] + \\ &\quad + i (\operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Así pues:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) &= \\ &= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (3') \end{aligned}$$

es decir, el producto de dos números complejos es un número complejo cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los factores y el argumento es igual a la suma de argumentos de los factores.

Observación 1. En virtud de la fórmula (3), los números complejos conjugados, $a + bi$ y $a - bi$, satisfacen a la igualdad:

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2,$$

es decir, el producto de dos números complejos conjugados es igual a la suma de los cuadrados de sus módulos.

4. División. La división de dos números complejos es la operación inversa a su multiplicación. Si

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = x + yi$$

(donde $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$), entonces x e y deben ser tales que se cumpla la igualdad:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)(x + yi),$$

o sea:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 x - b_2 y) + (a_2 y + b_2 x) i.$$

Por consiguiente,

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \quad b_1 = b_2 x + a_2 y,$$

de donde:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

y finalmente:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

En la práctica, la división de los números complejos se efectúa de la manera siguiente: para dividir $a_1 + ib_1$ por $a_2 + ib_2$, multiplicamos, tanto el dividendo como el divisor, por un número complejo conjugado de este último (es decir, por $a_2 - ib_2$). Entonces, el divisor será un número real; al dividir por éste la parte real y la imaginaria del dividendo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} &= \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i. \end{aligned}$$

Si el número complejo está expresado en forma trigonométrica, tendremos:

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Para verificar esta igualdad, basta multiplicar el divisor por el cociente:

$$\begin{aligned} r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)] &= \\ = r_2 \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] &= \\ = r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1). \end{aligned}$$

De tal modo, el módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los módulos del dividendo y del divisor; el argumento del cociente es igual a la diferencia entre los argumentos del dividendo y del divisor.

Observación 2. De las reglas de operaciones con números complejos se deduce que la adición, sustracción, multiplicación y división de los números complejos dan de nuevo un número complejo. Si las reglas de operaciones con números complejos son aplicadas a los números reales (considerándolos como caso particular de los números complejos), entonces estas reglas coinciden con las reglas ordinarias de la aritmética.

Observación 3. Volviendo a la definición de suma, diferencia, producto y cociente de los números complejos, es fácil comprobar que, si en estas expresiones son sustituidos los números complejos por sus números conjugados correspondientes, los resultados de las operaciones indicadas también son sustituidos por los números conjugados. De aquí, en particular, se deduce el teorema siguiente:

Teorema. Si en un polinomio con coeficientes reales

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$$

sustituimos x por el número $a + bi$, y, después, por el número conjugado $a - bi$, los resultados obtenidos serán mutuamente conjugados.

§ 3. ELEVACION A POTENCIA Y EXTRACCION DE LA RAZA DEL NUMERO COMPLEJO

1. Elevación a potencia. De la fórmula (3') del párrafo precedente se deduce que si n es un número entero positivo, entonces:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1)$$

Esta expresión es la fórmula de Moivre y muestra que, al elevar un número complejo a una potencia entera y positiva, el módulo de este número se eleva a la misma potencia y el argumento se multiplica por el exponente de esta potencia.

Consideremos ahora una aplicación más de la fórmula de Moivre. Haciendo $r = 1$, obtenemos:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Desarrollando el primer miembro según la fórmula del binomio de Newton e igualando las partes reales e imaginarias, podremos expresar $\sin n\varphi$ y $\cos n\varphi$ en función de potencias de $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$.

Así, por ejemplo, si $n = 3$, obtenemos:

$$\cos^3 \varphi + i 3 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi - i \operatorname{sen}^3 \varphi = \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi.$$

Usando la igualdad de estos números complejos, tenemos:
 $\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi$, $\operatorname{sen} 3\varphi = -\operatorname{sen}^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi$.

2. Extracción de la raíz. La raíz n -ésima de un número complejo es otro número complejo que, al ser elevado a la potencia n , dará el número comprendido bajo el radical, es decir, si:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} = \rho(\cos \psi + i \operatorname{sen} \psi),$$

$$\rho^n (\cos n\psi + i \operatorname{sen} n\psi) = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

Como los módulos de los números complejos iguales han de ser iguales y los argumentos pueden diferenciarse en un múltiplo de 2π , tenemos:

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

De aquí:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

donde, k es un número entero arbitrario, $\sqrt[n]{r}$ es el valor aritmético (real y positivo) de la raíz del número positivo r . Por consiguiente,

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (2)$$

Dando a k los valores $0, 1, 2, \dots, n-1$, obtenemos n diferentes valores de la raíz. Para otros valores de k los argumentos se diferenciarán de los obtenidos antes en un múltiplo de 2π y, por tanto, se obtendrán los valores de la raíz que coinciden con los estudiados.

Así pues, la raíz n -ésima de un número complejo tiene n diferentes valores.

La raíz n -ésima del número real A , distinto de cero, también tiene n valores, puesto que el número real es un caso particular del número complejo y puede ser representado en forma trigonométrica:

$$\text{si } A > 0, \text{ tenemos: } A = |A| (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0);$$

$$\text{si } A < 0, \text{ tenemos: } A = |A| (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi).$$

Ejemplo 1. Hallar todos los valores de la raíz cúbica de la unidad.

Solución. Representemos la unidad en forma trigonométrica:

$$1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0.$$

Según la fórmula (2):

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3}.$$

Haciendo k igual a 0, 1, 2, obtenemos tres valores de la raíz:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1; \quad x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}; \quad x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Tomando en cuenta que

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

resulta:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En la figura 163 los puntos A, B, C son las imágenes geométricas de las raíces obtenidas.

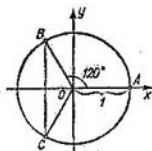


Fig. 163

3. Solución de la ecuación binomia. La ecuación

$$x^n = A$$

se llama *binomia*. Hallemos las raíces de esta ecuación.

Si A es un número real positivo, tenemos:

$$x = \sqrt[n]{A} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

La expresión encerrada en el paréntesis da todos los valores de la raíz de n -ésima potencia de la 1.

Si A es un número real negativo, entonces:

$$x = \sqrt[n]{|A|} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{n} \right).$$

La expresión entre paréntesis da todos los valores de la raíz de n -ésima potencia de -1 .

Si A es un número complejo, los valores de x se hallan según la fórmula (2).

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$x^4 = 1.$$

Solución.

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}.$$

Haciendo k igual a 0, 1, 2, 3, obtenemos:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = i,$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = -1,$$

$$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} = -i.$$

§ 4. FUNCION EXPONENCIAL CON EXPONENTE COMPLEJO Y SUS PROPIEDADES

Sea $z = x + iy$. Si x e y son variables reales, z es una variable compleja. A cada valor de la variable compleja le corresponde un punto bien determinado (fig. 161) en el plano Oxy (plano de la variable compleja.)

Definición. Si a cada valor de una variable compleja z , perteneciente a cierto dominio del plano de variables complejas, corresponde un valor bien determinado de otra variable compleja w , se dice que w es una *función de la variable compleja* z : $w = f(z)$ ó $w = w(z)$.

Existen las nociones del límite, de la derivada, de la integral, etc., de una función de variable compleja.

Estudiemos una función de la variable compleja, o bien, la función exponencial:

$$w = e^z$$

o sea:

$$w = e^{x+iy}.$$

Los valores complejos de la función w se determinan del modo siguiente*:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (1)$$

*) Demostraremos más adelante (§ 21, cap. XIII y § 18 cap. XVI, tomo II) la conveniencia de esta definición de la función exponencial.

es decir,

$$w(z) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (2)$$

Ejemplos:

$$1. z = 1 + \frac{\pi}{4} i, \quad e^{1 + \frac{\pi}{4} i} = e \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = e \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$2. z = 0 + \frac{\pi}{2} i, \quad e^{0 + \frac{\pi}{2} i} = e^0 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = i,$$

$$3. z = 1 + i, \quad e^{1+i} = e^1 (\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) = 0,54 + i \cdot 0,83,$$

4. $z = x$ (x es un número real), $e^{x+0i} = e^x (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x$ que es una función exponencial ordinaria.

Propiedades de la función exponencial

1. Si z_1 y z_2 son dos números complejos, entonces:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \quad (3)$$

Demostración. Sea

$$z_1 = x_1 + i y_1, \quad z_2 = x_2 + i y_2;$$

entonces

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Por otra parte, en virtud del teorema sobre el producto de dos números complejos expresados en forma trigonométrica, tenemos:

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) = \\ &= e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Los segundos miembros de las igualdades (4) y (5) son iguales y, por consiguiente, serán iguales también los primeros

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

2. De modo análogo se demuestra la fórmula:

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}. \quad (6)$$

3. Si m es un número entero, tenemos:

$$(e^z)^m = e^{mz}. \quad (7)$$

Esta fórmula se obtiene fácilmente de (3), cuando $m > 0$.

La misma se obtiene a partir de las fórmulas (3) y (6) si $m < 0$.

4. Demostremos la identidad:

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \quad (8)$$

En efecto, según las fórmulas (3) y (1) tenemos:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

De la identidad (8) se deduce que la función exponencial e es una función periódica con período $2\pi i$.

5. Estudiemos ahora la magnitud compleja

$$w = u(x) + iv(x),$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones reales de la variable real x . Es una función compleja de la variable real.

a) Supongamos que existen los límites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0); \quad \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = v(x_0).$$

Entonces, $u(x_0) + iv(x_0) = w_0$ es el límite de la variable compleja w .

b) Si existen las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$, la expresión

$$w'_x = u'(x) + iv'(x) \quad (9)$$

es la derivada de una función compleja de variable real con respecto al argumento real.

Estudiemos ahora la siguiente función exponencial:

$$w = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha + i\beta)x},$$

donde α y β son números constantes reales, y x es una variable real. Es una función compleja de variable real que, conforme a la fórmula (1), puede escribirse así:

$$w = e^{\alpha x} [\cos \beta x + i \sin \beta x]$$

ó

$$w = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Halleemos la derivada w'_x . Según la fórmula (9) tenemos:

$$\begin{aligned} w'_x &= (e^{\alpha x} \cos \beta x)' + i (e^{\alpha x} \sin \beta x)' = \\ &= e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + i e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) = \\ &= \alpha [e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] + i\beta [e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] = \\ &= (\alpha + i\beta) [e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)] = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x}. \end{aligned}$$

Así pues, si $w = e^{(\alpha + i\beta)x}$, entonces: $w' = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x}$

ó

$$[e^{(\alpha + i\beta)x}]' = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x}. \quad (10)$$

De tal modo, si k es un número complejo (y, en particular, real) y x es un número real:

$$(e^{kx})' = k e^{kx}. \quad (9')$$

Hemos obtenido la fórmula general para la derivación de una función exponencial. También tenemos:

$$(e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k (e^{kx})' = k^2 e^{kx}$$

y para n arbitrario:

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Utilizaremos estas fórmulas más adelante.

§ 5. FORMULA DE EULER.

FORMA EXPONENCIAL DEL NUMERO COMPLEJO

Si hacemos $x = 0$ en la fórmula (1) del párrafo anterior, obtenemos:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (1)$$

Esta es la *fórmula de Euler* y expresa la relación entre la función exponencial con exponente imaginario y las funciones trigonométricas.

Sustituyendo y por $-y$ en la fórmula (1), obtenemos:

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \quad (2)$$

De las igualdades (1) y (2) hallemos $\cos y$ y $\sin y$:

$$\left. \begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Las fórmulas (3) se usan, en particular, para expresar las potencias de $\cos \varphi$ y de $\sin \varphi$, así como también de sus productos, en función del seno y del coseno de arcos múltiples.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1. \cos^2 y &= \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{i2y} + 2 + e^{-i2y}) = \\ &= \frac{1}{4} [(\cos 2y + i \sin 2y) + 2 + (\cos 2y - i \sin 2y)] = \\ &= \frac{1}{4} (2 \cos 2y + 2) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 = \\
 &= \frac{(e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi})^2}{4 \cdot 4i^2} = -\frac{1}{8} \cos 4\varphi + \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Forma exponencial del número complejo. Escribamos un número complejo z en forma trigonométrica:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

donde, r es el módulo y φ , el argumento de este número complejo. Según la fórmula de Euler:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Por consiguiente, todo número complejo puede ser representado en la forma exponencial:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Ejemplos. Escribir los números 1, i , -2 , $-i$ en la forma exponencial. **Solución.**

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i},$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2} i},$$

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{\pi i},$$

$$-i = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = e^{-\frac{\pi}{2} i}.$$

§ 6. DESARROLLO DEL POLINOMIO EN FACTORES

Sabemos que la función

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

en la que n es un número entero se llama *polinomio* o *función racional entera* de x . El número n es el *grado del polinomio*. Los coeficientes $A_0, A_1, \dots, A_n$ son aquí números reales o complejos. La variable independiente x puede tomar tanto valores reales como complejos. El valor de la variable x para el cual el polinomio se reduce a cero es la *raíz del polinomio*.

Teorema 1. (Teorema de Bezout). *El resto de la división del polinomio $f(x)$ por la diferencia $(x - a)$ es igual a $f(a)$.*

Demostración. El cociente de la división del polinomio $f(x)$ por $(x - a)$ es un polinomio $f_1(x)$, de grado inferior en una unidad

que él del polinomio $f(x)$, el resto es un número constante R . Entonces podemos escribir:

$$f(x) = (x - a) f_1(x) + R. \quad (1)$$

Esta igualdad es válida para todos los valores de x distintos de a (la división por $x - a$ cuando $x = a$ no tiene sentido).

Si x tiende a a , el límite del primer miembro de la igualdad (1) es $f(a)$ y el límite del segundo miembro, es R . Como las funciones $f(x)$ y $(x - a) f_1(x) + R$ son iguales para todos los valores de $x \neq a$, sus límites serán también iguales, cuando $x \rightarrow a$, es decir, $f(a) = R$.

Colorario. Si a es una raíz del polinomio, es decir, $f(a) = 0$, entonces $f(x)$ se divide por $x - a$ sin resto alguno y, por tanto, se representa como un producto:

$$f(x) = (x - a) f_1(x),$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio.

Ejemplo 1. El polinomio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ se anula cuando $x = 1$, es decir, $f(1) = 0$. Por eso el polinomio dado se divide sin resto por $x - 1$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Estudiemos ahora las ecuaciones con una incógnita x .

Todo número (real o complejo) que sustituya a x en la ecuación y la convierta en identidad, se llama raíz de la ecuación.

Ejemplo 2. Los números $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$; $x_3 = \frac{9\pi}{4}$; ..., son raíces de la ecuación $\cos x = \sin x$.

Si una ecuación tiene la forma $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es polinomio de grado n , se llama ecuación *algebraica* de n -ésimo grado. De la definición se deduce que las raíces de la ecuación algebraica $P(x) = 0$ son idénticas a las del polinomio $P(x)$.

Naturalmente, surge la pregunta, si toda ecuación tiene raíces. Para las ecuaciones no algebraicas la respuesta es negativa: existen ecuaciones no algebraicas que no tienen raíces (reales, ni complejas), como, por ejemplo, la ecuación $e^x = 0$ *).

Sin embargo, para las ecuaciones algebraicas la respuesta es positiva, lo que constituye el contenido del siguiente teorema fundamental del álgebra.

*) En efecto, si el número $z_1 = a + bi$ fuera la raíz de esta ecuación, existiría la identidad $e^{a+bi} = 0$, o (en virtud de la fórmula de Euler) $e^a (\cos b + i \sin b) = 0$. Pero, e^a no puede anularse cualquiera que sea el número real a ; tampoco $\cos b = i \sin b$ es igual a cero (puesto que el módulo de este número es igual a $\sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} = 1$ para cualquier b). Por tanto, el producto $e^a (\cos b + i \sin b) \neq 0$, es decir, $e^{a+bi} \neq 0$, lo que significa que la ecuación $e^x = 0$ no tiene raíces.

Teorema 2. (Teorema fundamental del álgebra). Toda función racional entera $f(x)$ tiene por lo menos una raíz real o compleja.

Este teorema se demuestra en el curso de álgebra superior. Aquí lo admitiremos sin demostración.

Utilizando el teorema fundamental del álgebra es fácil demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3. Todo polinomio de n -ésimo grado puede ser desarrollado en n factores lineales de la forma $x - a$ y un factor igual al coeficiente de x^n .

Demostración. Sea $f(x)$ un polinomio de grado n :

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n.$$

En virtud del teorema fundamental este polinomio tiene por lo menos una raíz; designémosla por a_1 . Ahora bien, según el corolario del teorema de Bezout podemos escribir:

$$f(x) = (x - a_1) f_1(x),$$

donde, $f_1(x)$ es el polinomio de grado $(n - 1)$; $f_1(x)$ también tiene una raíz que designemos por a_2 . Entonces,

$$f_1(x) = (x - a_2) f_2(x),$$

donde, $f_2(x)$ es el polinomio de grado $(n - 2)$. De igual manera:

$$f_2(x) = (x - a_3) f_3(x).$$

Continuando este proceso, llegamos a la expresión:

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n) f_n,$$

donde f_n es un polinomio de grado cero, es decir, f_n es un número fijo. Evidentemente, este número es igual al coeficiente de x^n , es decir, $f_n = A_0$.

En virtud de las igualdades obtenidas podemos escribir:

$$f(x) = A_0 (x - a_1) (x - a_2) \dots (x - a_n). \quad (2)$$

Del desarrollo (2) se deduce que los números $a_1, a_2, \dots, a_n$ son las raíces del polinomio $f(x)$, puesto que, realizada la sustitución $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$, el segundo miembro y, por consiguiente, el primero se reducen a cero.

Ejemplo 3. El polinomio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ se reduce a cero, cuando

$$x = 1, x = 2, x = 3.$$

Por consiguiente,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Ningún valor $x = a$ distinto de $a_1, a_2, \dots, a_n$ puede ser raíz del polinomio $f(x)$, puesto que ningún factor del segundo miembro

de la igualdad (2) se anula cuando $x = a$. Ahora podemos expresar el siguiente enunciado:

Todo polinomio de grado n no puede tener más que n raíces diferentes.

Pero, en este caso, obtenemos el teorema siguiente.

Teorema 4. *Si los valores de dos polinomios $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ de grado n coinciden para $n + 1$ valores diferentes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ del argumento x , los polinomios enunciados son idénticos.*

Demostración. Designemos por $f(x)$ la diferencia de estos polinomios:

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Según la hipótesis, $f(x)$ es un polinomio de grado no superior a n , que se reduce a cero en los puntos $a_1, \dots, a_n$. Por tanto, éste puede ser representado en la forma:

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Pero, según la hipótesis, $f(x)$ se anula también en el punto a_0 . Entonces, $f(a_0) = 0$, siendo distintos de cero todos los factores lineales. Por eso, $A_0 = 0$, y de la igualdad (2) se deduce que el polinomio $f(x)$ es idénticamente igual a cero. Por consiguiente, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$, ó $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Teorema 5. *Si el polinomio*

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$$

es idénticamente igual a cero, todos sus coeficientes son iguales a cero.

Demostración. Escribamos el desarrollo de este polinomio en factores según la fórmula (2):

$$\begin{aligned} P(x) &= A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = \\ &= A_0(x - a_1) \dots (x - a_n). \end{aligned} \quad (1)$$

Si este polinomio es idénticamente igual a cero, también será igual a cero para un valor de x , distinto de $a_1, \dots, a_n$. Pero, en este caso, los factores $x - a_1, \dots, x - a_n$ no se anulan y, por tanto, $A_0 = 0$.

De igual manera se demuestra que $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, etc.

Teorema 6. *Los coeficientes correspondientes de dos polinomios idénticamente iguales son iguales.*

Esto se deduce del hecho de que la diferencia entre los polinomios dados es un polinomio idénticamente igual a cero. Por tanto, en virtud del teorema anterior, todos sus coeficientes son ceros.

Ejemplo 4. Si el polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ es idénticamente igual al polinomio $x^3 - 5x$, entonces: $a = 0$, $b = 1$, $c = -5$, $d = 0$.

§ 7. RAICES MÚLTIPLES DEL POLINOMIO

Si ciertos factores lineales del desarrollo de un polinomio de grado n

$$f(x) = A_0 (x - a_1) (x - a_2) \dots (x - a_n) \quad (1)$$

son iguales, se puede agruparlos y luego, factorizar el polinomio de la manera siguiente:

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}. \quad (1')$$

Donde

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

En este caso se dice que a_1 es una raíz múltiple de orden k_1 , (k_1 , es la multiplicidad de la raíz); a_2 es una raíz múltiple de orden k_2 , etc.

Ejemplo. El polinomio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ se desarrolla en los siguientes factores lineales:

$$f(x) = (x-2)(x-2)(x-1).$$

Este desarrollo puede escribirse así:

$$f(x) = (x-2)^2 (x-1),$$

$a_1 = 2$ es una raíz doble; $a_2 = 1$, una raíz simple.

Si el polinomio tiene una raíz múltiple a de orden k , consideremos que el polinomio tiene k raíces iguales. Entonces, del teorema del desarrollo de un polinomio en factores lineales se deduce el teorema siguiente.

Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (reales o complejas).

Observación. Todo lo que se ha dicho acerca de las raíces del polinomio

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

es igualmente cierto para las raíces de una ecuación algebraica:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0.$$

Demostremos a continuación, el teorema siguiente:

Teorema. Si a_1 es una raíz múltiple de orden $k_1 > 1$ para el polinomio $f(x)$, entonces a_1 será una raíz múltiple de orden $k_1 - 1$ para la derivada $f'(x)$.

Demostración. Si a_1 es una raíz múltiple de orden k_1 , donde $k_1 > 1$ de la fórmula (1') se deduce:

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \varphi(x),$$

donde $\varphi(x) = (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}$ no se anula para $x = a_1$, es decir, $\varphi(a_1) \neq 0$. Derivando, tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= k_1(x - a_1)^{k_1-1}\varphi(x) + (x - a_1)^{k_1}\varphi'(x) = \\ &= (x - a_1)^{k_1-1}[k_1\varphi(x) + (x - a_1)\varphi'(x)]. \end{aligned}$$

Designemos:

$$\psi(x) = k_1\varphi(x) + (x - a_1)\varphi'(x).$$

Entonces,

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1-1}\psi(x),$$

donde:

$$\psi(a_1) = k_1\varphi(a_1) + (a_1 - a_1)\varphi'(a_1) = k_1\varphi(a_1) \neq 0,$$

es decir, $x = a_1$ es la raíz múltiple de orden $k_1 - 1$ del polinomio $f'(x)$. De la demostración se deduce que si $k_1 = 1$, a_1 no es una raíz de la derivada $f'(x)$.

Del teorema demostrado se deduce que a_1 es una raíz múltiple de orden $k_1 - 2$, para la derivada $f''(x)$, una raíz de orden $k_1 - 3$, para la derivada $f'''(x)$..., una raíz de orden 1 (raíz simple), para la derivada $f^{(k_1-1)}(x)$; y no es una raíz para la derivada $f^{(k_1)}(x)$, es decir,

$$f(a_1) = 0, \quad f'(a_1) = 0, \quad f''(a_1) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k_1-1)}(a_1) = 0,$$

pero

$$f^{(k_1)}(a_1) \neq 0.$$

§ 8. FACTORIZACION DE UN POLINOMIO CON RAICES COMPLEJAS

Las raíces $a_1, a_2, \dots, a_n$ de la fórmula (1), § 7, cap. VII pueden ser tanto reales como complejas. Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema. Si un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales tiene la raíz compleja $a + bi$, este polinomio tiene también una raíz conjugada $a - bi$.

Demostración. Si en el polinomio $f(x)$ sustituimos x por el número $a + bi$, elevamos a unas potencias y agrupamos por separado los términos que contienen i y no contienen i , obtenemos:

$$f(a + bi) = M + Ni,$$

donde M y N son las expresiones que no contienen i .

Puesto que $a + bi$ es la raíz del polinomio, tenemos:

$$f(a + bi) = M + Ni = 0$$

de donde:

$$M = 0, \quad N = 0$$

Sustituimos ahora x en el polinomio por la expresión $a - bi$. Entonces (según la observación 3, § 2), obtenemos un número conjugado con $M + Ni$, es decir,

$$f(a - bi) = M - Ni.$$

Como $M = 0$, y $N = 0$, se tiene: $f(a - bi) = 0$, es decir, $a - bi$ es una raíz del polinomio.

Por consiguiente, en la factorización

$$f(x) = A_0 (x - a_1) (x - a_2) \dots (x - a_n)$$

las raíces complejas se encuentran en pares conjugados.

Al multiplicar entre sí los factores lineales que corresponden al par de raíces complejas conjugadas, obtenemos un trinomio de segundo grado con coeficientes reales:

$$\begin{aligned} [x - (a + bi)] [x - (a - bi)] &= [(x - a) - bi] [(x - a) + bi] = \\ &= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q, \end{aligned}$$

donde $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ son los números reales.

Si el número $a + bi$ es una raíz múltiple de orden k , el número conjugado $a - bi$ es también una raíz múltiple de orden k , de modo que, en la factorización de un polinomio entran tantos factores lineales $x - (a + bi)$ cuantos sean los factores lineales $x - (a - bi)$. Así, todo polinomio con coeficientes reales se desarrolla en factores con coeficientes reales de primero y segundo grado de multiplicidad correspondiente, es decir,

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots$$

$$\dots (x - a_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s},$$

donde

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n.$$

§ 9. INTERPOLACION.

FORMULA DE LA INTERPOLACION DE LAGRANGE

Supongamos que al estudiar cierto fenómeno, fue demostrada la existencia de una dependencia funcional entre las magnitudes x e y , que caracteriza el aspecto cuantitativo de este fenómeno. La función $y = \varphi(x)$ es desconocida, sin embargo, mediante una serie de experiencias determinemos los valores de esta función: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ para ciertos valores del argumento $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, pertenecientes al segmento $[a, b]$.

El problema consiste en hallar la función más simple, para facilitar los cálculos (un polinomio, por ejemplo) que sea la expresión exacta o aproximada de la función desconocida $y = \varphi(x)$ en el segmento $[a, b]$. En forma más abstracta el problema puede ser

formulado de modo siguiente: los valores de una función desconocida $y = \varphi(x)$ se dan en $n + 1$ puntos diferentes: $x_0, x_1, \dots, x_n$ del segmento $[a, b]$:

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n);$$

es preciso hallar un polinomio $P(x)$ del grado inferior o igual a n que exprese aproximadamente la función $\varphi(x)$.

Para esto elijamos un polinomio cuyos valores en los puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ coincidan con los correspondientes valores de $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ de la función $\varphi(x)$ (fig. 164). En este caso,

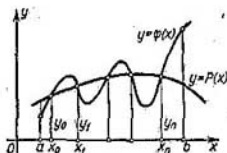


Fig. 164

el problema planteado, que se llama «problema de interpolación de la función», se puede formular de modo siguiente: hallar para una función dada $\varphi(x)$ un polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$, que tome en los puntos dados $x_0, x_1, \dots, x_n$ los valores

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n).$$

Tomemos para esto un polinomio de n -ésimo grado y de la forma:

$$\begin{aligned} P(x) = & C_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) + \\ & + C_1(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n) + \\ & + C_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n) + \dots \\ & \dots + C_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (1)$$

Determinemos los coeficientes $C_0, C_1, \dots, C_n$ de tal manera que se cumplan las condiciones:

$$P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n. \quad (2)$$

Hagamos $x = x_0$ en la fórmula (1); entonces, teniendo en cuenta las igualdades (2), obtenemos:

$$y_0 = C_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)$$

de donde

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}.$$

Haciendo, luego, $x = x_1$, obtenemos:

$$y_1 = C_1 (x_1 - x_0) (x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)$$

de donde

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0) (x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}.$$

De igual manera encontramos

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0) (x_2 - x_1) (x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)};$$

.....

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0) (x_n - x_1) (x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})}.$$

Poniendo los valores determinados de los coeficientes en la fórmula (1), obtenemos:

$$\begin{aligned} P(x) = & \frac{(x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1) (x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} y_0 + \\ & + \frac{(x - x_0) (x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0) (x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} y_1 + \\ & + \frac{(x - x_0) (x - x_1) (x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_0) (x_2 - x_1) (x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} y_2 + \dots \\ & \dots + \frac{(x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} y_n. \end{aligned} \quad (3)$$

La fórmula enunciada se llama *fórmula de interpolación de Lagrange*.

Admitamos sin demostración que si $\varphi(x)$ tiene una derivada de $(n+1)$ —ésimo orden en el segmento $[a, b]$, el error cometido, al reemplazar la función $\varphi(x)$ por el polinomio $P(x)$, (es decir, la magnitud $R(x) = \varphi(x) - P(x)$) satisface a la desigualdad:

$$|R(x)| < |(x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_n)| \frac{1}{(n+1)!} \max |\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Observación. Del teorema 4, § 6, se deduce que el polinomio $P(x)$ es el único que satisface a las condiciones del problema planteado.

Ejemplo. Como resultado de un experimento hemos obtenido los valores de la función $y = \varphi(x)$: $y_0 = 3$ para $x_0 = 1$; $y_1 = -5$ para $x_1 = 2$; $y_2 = 4$ para $x_2 = -4$. Hallar la expresión aproximada de la función $y = \varphi(x)$ por medio del polinomio de segundo grado.

Solución. Según la fórmula (3) tenemos (para $n = 2$):

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} (-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)} 4,$$

o sea

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}.$$

§ 10. FORMULA DE LA INTERPOLACION DE NEWTON

Sean conocidos $n + 1$ valores de la función $\varphi(x)$: $y_0, y_1, \dots, y_n$, que corresponden a $n + 1$ valores del argumento: $x_0, x_1, \dots, x_n$, siendo constante la diferencia entre los valores contiguos del argumento. Designemos por h esta diferencia. La tabla de valores de la función desconocida $y = \varphi(x)$ para los valores correspondientes del argumento tendrá la forma siguiente.

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	$x_n = x_0 + nh$
y	y_0	y_1	y_2	y_n

Formemos un polinomio de grado no superior a n , que tomará valores correspondientes a los de x . Este polinomio representará aproximadamente la función $\varphi(x)$.

Introduzcamos las designaciones:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0; \Delta y_1 = y_2 - y_1; \Delta y_2 = y_3 - y_2, \text{ etc.}$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0),$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0),$$

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0.$$

Estas son las llamadas diferencias de primero, segundo y n -ésimo orden. Escribamos un polinomio que toma los valores

$$y_0, y_1 \text{ para } x_0 \text{ y } x_1.$$

Será un polinomio de primer grado

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}. \quad (1)$$

En efecto,

$$P_1(x)|_{x=x_0} = y_0, \quad P_1|_{x=x_1} = y_0 + \Delta y_0 \frac{h}{h} = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1.$$

Escribamos un polinomio que toma los valores

y_0, y_1, y_2 para x_0, x_1, x_2 .

Será un polinomio de segundo grado:

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right). \quad (2)$$

Es evidente que

$$P_2|_{x=x_0} = y_0, \quad P_2|_{x=x_1} = y_1.$$

Comprobemos ahora:

$$P_2|_{x=x_2} = y_0 + \Delta y_0 \cdot 2 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot \frac{2h}{h} \left(\frac{2h}{h} - 1 \right) = y_2.$$

El polinomio de tercer orden tendrá la forma:

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \frac{\Delta^3 y_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{x - x_0}{h} \times \\ \times \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 2 \right).$$

El polinomio del orden n que asume los valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ para $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, será:

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{h} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \dots \left[\frac{x - x_0}{h} - (n-1) \right]. \quad (4)$$

Mediante una sustitución directa es fácil convencerse de que la igualdad obtenida es correcta. Esta es la fórmula o el polinomio de la interpolación de Newton.

En esencia, el polinomio de Lagrange y el de Newton para la tabla dada de valores, son idénticos aunque escritos de modo diferente. Es decir, el polinomio de grado no superior a n , que toma $n+1$ valores dados para $n+1$ valores de x , se halla de una sola manera.

En muchos casos resulta más conveniente utilizar el polinomio de la interpolación de Newton que el de Lagrange. Su particularidad consiste en que, al pasar del polinomio de grado k al polinomio de grado $k+1$, los primeros $k+1$ términos no cambian, sino que se adiciona un término nuevo que es igual a cero, para todos los valores anteriores del argumento.

Observación. Según las fórmulas de Lagrange (véase la fórmula 3 § 10) y de Newton (fórmula 4) se determinan los valores de una función en el segmento $x_0 < x < x_n$. Si estas fórmulas se usan para determinar el valor de la función, cuando $x < x_0$ (lo que se puede hacer cuando $|x - x_0|$ es pequeño), se dice que se efectúa la extrapolación de la tabla hacia atrás. Si se determina el valor de la función para $x_0 < x$, se dice que se efectúa la extrapolación de la tabla hacia adelante.

§ 11. DERIVACION NUMERICA

Supongamos que los valores de una función desconocida $\Phi(x)$ están dados por medio de la tabla que fue examinada anteriormente. Es preciso determinar aproximadamente la derivada de esta función. Con este fin se forma el polinomio de interpolación de Lagrange o de Newton y de este último se halla la derivada.

Puesto que más a menudo se analizan las tablas de iguales diferencias entre los valores vecinos del argumento, utilicemos la fórmula de interpolación de Newton. Sean dados tres valores de la función: y_0, y_1, y_2 , que corresponden a los valores: x_0, x_1, x_2 del argumento. Entonces, escribamos el polinomio (2) y derivémoslo. Obtenemos el valor aproximado de la derivada de la función en el segmento $x_0 \leq x_1 \leq x_2$

$$\varphi'(x) \approx P'_2(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \left(2 \frac{x - x_0}{h} - 1 \right). \quad (5)$$

Cuando $x = x_0$, tenemos:

$$\varphi'(x_0) \approx P'_2(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h}. \quad (6)$$

Examinemos el polinomio de tercer orden (véase (3)), y derivándolo, obtenemos la siguiente expresión para su derivada:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) \approx P'_3(x) &= \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \left(2 \frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_0}{2 \cdot 3h} \left[3 \left(\frac{x - x_0}{h} \right)^2 - 6 \left(\frac{x - x_0}{h} \right) + 2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

En particular, cuando $x = x_0$, tenemos:

$$\varphi'(x_0) \approx P'_3(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h}. \quad (8)$$

Al utilizar la fórmula (4), cuando $x = x_0$, obtenemos la siguiente forma para la expresión aproximada de la derivada:

$$\varphi'(x_0) \approx P'_n(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \dots \quad (9)$$

Notemos que para una función que tiene derivadas, la diferencia Δy_0 es una infinitesimal de primer orden respecto a h ; $\Delta^2 y_0$, infinitesimal de segundo orden; $\Delta^3 y_0$, de tercer orden, etc.

§ 12. ÓPTIMA APROXIMACIÓN DE LAS FUNCIONES POR MEDIO DE POLINOMIOS. TEORÍA DE CHEBISHEV

Del problema examinado en el § 9, se deduce, naturalmente, lo siguiente: sea una función continua $\varphi(x)$ en el segmento $[a, b]$. ¿Se puede expresarla aproximadamente en forma de un polinomio $P(x)$ con cualquier grado de precisión previamente dado? Es decir, ¿será posible encontrar un polinomio $P(x)$ tal que la diferencia en valor absoluto, entre $\varphi(x)$ y $P(x)$, sea inferior en todos los puntos del segmento $[a, b]$, que cualquier número positivo ε previamente dado? El teorema que sigue y que citamos aquí sin demostración, nos da una respuesta afirmativa*.

Teorema de Weierstrass. *Si la función $\varphi(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $P(x)$, que en cada punto de este segmento se cumpla la igualdad:*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

S. N. Bernstein, notable matemático y académico soviético, nos ha proporcionado el siguiente método racional para la formación directa de polinomios aproximadamente iguales a la función continua $\varphi(x)$ en el segmento dado.

Supongamos, por ejemplo, que la función $\varphi(x)$ es continua en el segmento $[0, 1]$.

* Notemos que el polinomio de la interpolación de Lagrange (véase (3) § 9) no da la respuesta a la cuestión planteada. En los puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ los valores de este polinomio en realidad son iguales a los valores correspondientes de la función, pero en otros puntos del segmento $[a, b]$ estos valores pueden diferenciarse notablemente.

Formemos la expresión:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^n \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

En esta expresión C_n^m son coeficientes binomiales; $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ es el valor de la función dada en el punto $x = \frac{m}{n}$. La expresión $B_n(x)$ es un polinomio de n -ésimo grado, llamado *de Bernstein*.

Para todo número arbitrario $\varepsilon > 0$ positivo, se puede buscar un polinomio de Bernstein tal (es decir, elegir su grado n) de manera que para todos los valores de x en el segmento $[0, 1]$ se cumpla la desigualdad:

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Observemos que el análisis del segmento $[0, 1]$ en lugar del segmento arbitrario $[a, b]$ no limita esencialmente las leyes generales puesto que mediante el cambio de variable: $x = a + t(b-a)$, se puede transformar cualquier segmento $[a, b]$, en el segmento $[0, 1]$. Esta transformación conserva el grado del polinomio.

La teoría sobre la óptima aproximación de las funciones mediante polinomios fue desarrollada por el célebre matemático ruso P. L. Chébishev (1821-1894).

Los valiosos resultados que obtuvo en este campo, han influenciado decisivamente en los trabajos de matemáticos posteriores. El punto de partida en la creación de esta teoría fue su trabajo en la teoría de los mecanismos articulados que son de amplio uso en la maquinaria. El estudio de tales mecanismos le condujo a la búsqueda entre todos los polinomios de un grado n dado, cuyo coeficiente de término mayor es igual a la unidad, de un polinomio tal que se desvíe de cero, en el segmento dado, mucho menor que todos los demás polinomios. Este gran matemático logró a resolver el problema y los polinomios hallados por él fueron llamados *polinomios de Chébishev*. Estos poseen muchas propiedades notables y son actualmente un potente medio de investigaciones en numerosos problemas matemáticos y técnicos.

Ejercicios para el capítulo VII

1. Hallar $(3+5i)(4-i)$. Respuesta: $17+17i$.
2. Hallar $(6+11i)(7+3i)$. Respuesta: $9+95i$.
3. Hallar $\frac{3-i}{4+5i}$. Respuesta: $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$.
4. Hallar $(4-7i)^3$. Respuesta: $-524+7i$.
5. Hallar $\sqrt{i}$. Respuesta: $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
6. Ha-

llar $\sqrt{-5-12i}$. *Respuesta:* $\pm(2-3i)$. 7. Reducir a la forma trigonométrica las expresiones: a) $1+i$. *Respuesta:* $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. b) $1-i$. *Respuesta:* $\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$. 8. Hallar $\sqrt[3]{i}$. *Respuesta:* $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$;

$\frac{i-\sqrt{3}}{2}$. 9. Expresar en función de $\sin x$ y $\cos x$ las siguientes expresiones: $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 4x$, $\cos 4x$, $\sin 5x$, $\cos 5x$. 10. Expresar en función del seno y coseno de los arcos múltiples las expresiones: $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$, $\cos^6 x$; $\sin^2 x$, $\sin^3 x$, $\sin^4 x$, $\sin^5 x$. 11. Dividir $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$ por $x+4$. *Respuesta:* $f(x)=(x+4)(x^2-8x+40)-161$, es decir, cociente $=x^2-8x+40$; el resto $f(-4)=-161$. 12. Dividir $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ por $x+3$. *Respuesta:* $f(x)=(x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$. 13. Dividir $f(x)=x^7-1$ por $x-1$. *Respuesta:* $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Factorizar los polinomios: 14. $f(x)=x^4-1$. *Respuesta:* $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. 15. $f(x)=x^2-x-2$. *Respuesta:* $f(x)=(x-2)(x+1)$. 16. $f(x)=x^3+1$. *Respuesta:* $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$.

17. Como resultado de un experimento se han obtenido los valores de la función y de x :

$$y_1=4 \text{ para } x_1=0,$$

$$y_2=6 \text{ para } x_2=1,$$

$$y_3=10 \text{ para } x_3=2.$$

Expresar de modo aproximado esta función mediante un polinomio de segundo grado. *Respuesta:* x^2+x+4 .

18. Hallar el polinomio de cuarto grado que toma respectivamente los valores 2, 1, -1, 5, 0, para $x=1, 2, 3, 4, 5$. *Respuesta:*

$$\frac{3}{2}x^4-17x^3+\frac{129}{2}x^2-92x+35.$$

19. Hallar el polinomio de grado posiblemente inferior que toma respectivamente los valores 3, 7, 9, 19 para $x=2, 4, 5, 10$. *Respuesta:* $2x-1$.

20. Hallar los polinomios de Bernstein de primero, segundo, tercero, cuarto grados para la función $y=\sin \pi x$ en el segmento $[0,1]$. *Respuesta:*

$$B_1(x)=0; \quad B_2(x)=2x(1-x); \quad B_3(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x); \quad B_4(x)=2x(1-x) \times \\ \times [(2\sqrt{2}-3)x^2-(2\sqrt{2}-3)x+\sqrt{2}].$$

N. PISKUNOV

cálculo diferencial e integral

tomo II

Editorial



Mir Moscú



Н. С. ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ

II

Седьмое издание

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

N. PISKUNOV

CALCULO
DIFERENCIAL
E INTEGRAL

3ª edición

TOMO

II

EDITORIAL MIR · MOSCU

Traducido del ruso por el ingeniero
К. МЕДКОВ

(на испанском языке)

Impreso en la URSS

© Traducción al español Editorial Mir. 1977

INDICE

CAPITULO XIII. ECUACIONES DIFERENCIALES

§ 1. Planteo del problema. Ecuación del movimiento de un cuerpo, siendo la resistencia del medio proporcional a la velocidad. Ecuación de la catenaria	5
§ 2. Definiciones	8
§ 3. Ecuaciones diferenciales de primer orden (generalidades)	9
§ 4. Ecuaciones con variables separadas y separables. Problema de la desintegración del radio	14
§ 5. Ecuaciones homogéneas de primer orden	19
§ 6. Ecuaciones que se reducen a ecuaciones homogéneas	21
§ 7. Ecuaciones lineales de primer orden	24
§ 8. Ecuación de Bernoulli	27
§ 9. Ecuaciones en diferenciales totales	29
§ 10. Factor integrante	32
§ 11. Envolvente de una familia de curvas	34
§ 12. Soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden	42
§ 13. Ecuación de Clairaut	43
§ 14. Ecuación de Lagrange	46
§ 15. Trayectorias ortogonales e isogonales	48
§ 16. Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores (generalidades) . .	53
§ 17. Ecuación de la forma $y^{(n)} = f(x)$	55
§ 18. Algunos tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se reducen a ecuaciones de primer orden	58
§ 19. Método gráfico de la integración de las ecuaciones diferenciales de segundo orden	67
§ 20. Ecuaciones lineales homogéneas. Definiciones y propiedades generales	69
§ 21. Ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes	76
§ 22. Ecuaciones lineales homogéneas de n — ésimo orden con coeficientes constantes	80
§ 23. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden	83
§ 24. Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes	87
§ 25. Ecuaciones lineales no homogéneas de órdenes superiores	93
§ 26. Ecuación diferencial de oscilaciones mecánicas	97
§ 27. Oscilaciones libres	99
§ 28. Oscilaciones forzadas	102
§ 29. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	106
§ 30. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	112
§ 31. Noción sobre la teoría de la estabilidad de Liapunov	119
§ 32. Solución aproximada de las ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de Euler	125

§ 33. Solución aproximada de las ecuaciones diferenciales por el método de diferencias, basado en el empleo de la fórmula de Taylor. Método de Adams	128
§ 34. Método aproximado de integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden	135
<i>Ejercicios</i>	

CAPITULO XIV. INTEGRALES MÚLTIPLES

§ 1. Integral doble	153
§ 2. Cálculo de la integral doble	156
§ 3. Cálculo de la integral doble (continuación)	162
§ 4. Cálculo de áreas y volúmenes con ayuda de integrales dobles	168
§ 5. Integral doble en coordenadas polares	171
§ 6. Sustitución de variables en una integral doble (caso general)	178
§ 7. Cálculo de las áreas de superficies	183
§ 8. Densidad de distribución de la materia y la integral doble	187
§ 9. Momento de inercia del área de una figura plana	188
§ 10. Coordenadas del centro de gravedad del área de una figura plana	192
§ 11. Integral triple	194
§ 12. Cálculo de la integral triple	195
§ 13. Cambio de variables en una integral triple	201
§ 14. Momento de inercia de un cuerpo y coordenadas de su centro de gravedad	205
§ 15. Cálculo de las integrales dependientes de un parámetro	207
<i>Ejercicios</i>	

CAPITULO XV. INTEGRALES CURVILINEAS E INTEGRALES DE SUPERFICIE

§ 1. Integral curvilínea	215
§ 2. Cálculo de la integral curvilínea	218
§ 3. Fórmula de Green	224
§ 4. Condiciones para que una integral curvilínea no dependa de la trayectoria de integración	227
§ 5. Integral de superficie	232
§ 6. Cálculo de la integral de superficie	234
§ 7. Fórmula de Stokes	237
§ 8. Fórmula de Ostrogradski	242
§ 9. Operador de Hamilton y algunas de sus aplicaciones	245
<i>Ejercicios</i>	

CAPITULO XVI. SERIES

§ 1. Serie. Suma de una serie	255
§ 2. Condición necesaria de convergencia de una serie	258
§ 3. Comparación de las series con términos positivos	261
§ 4. Criterio de d'Alembert	262
§ 5. Criterio de Cauchy	266
§ 6. Criterio integral de convergencia de la serie	269
§ 7. Series alternantes. Teorema de Leibniz	272
§ 8. Series con términos positivos y negativos. Convergencia absoluta y condicional	274
§ 9. Series de funciones	278
§ 10. Series mayorantes	279

§ 11. Continuidad de la suma de una serie	281
§ 12. Integración y derivación de las series	284
§ 13. Series de potencias. Intervalo de convergencia	287
§ 14. Derivación de las series de potencias	292
§ 15. Series de potencias de $x - a$	293
§ 16. Series de Taylor y de Maclaurin	294
§ 17. Ejemplos de desarrollo de las funciones en series	296
§ 18. Fórmula de Euler	298
§ 19. Serie binomial	299
§ 20. Desarrollo de la función $\ln(1+x)$ en una serie de potencias. Cálculo de logaritmos	302
§ 21. Aplicación de las series al cálculo de integrales definidas	304
§ 22. Aplicación de las series a la integración de ecuaciones diferenciales	306
§ 23. Ecuación de Bessel	309
<i>Ejercicios</i>	

CAPITULO XVII. SERIES DE FOURIER

§ 1. Definición. Planteo del problema	323
§ 2. Ejemplos de desarrollo de las funciones en series de Fourier	328
§ 3. Una observación sobre el desarrollo de la función periódica en la serie de Fourier	333
§ 4. Series de Fourier para las funciones pares e impares	335
§ 5. Serie de Fourier para la función de período $2l$	337
§ 6. Desarrollo de una función no periódica en la serie de Fourier	339
§ 7. Aproximación en promedio de una función dada con ayuda de un polinomio trigonométrico	341
§ 8. Integral de Dirichlet	347
§ 9. Convergencia de la serie de Fourier en un punto dado	349
§ 10. Algunas condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier	352
§ 11. Análisis armónico práctico	355
§ 12. Integral de Fourier	356
§ 13. Integral de Fourier en forma compleja	360
<i>Ejercicios</i>	

CAPITULO XVIII. ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA

§ 1. Tipos fundamentales de las ecuaciones de la física matemática	365
§ 2. Ecuación de oscilaciones de una cuerda. Formulación del problema con valores de contorno. Ecuaciones de oscilaciones eléctricas en los conductores	366
§ 3. Solución de la ecuación de vibraciones de una cuerda por el método de separación de las variables (método de Fourier)	371
§ 4. Ecuación de propagación del calor en un vástago. Planteo del problema con valores de contorno	375
§ 5. Propagación del calor en el espacio	377
§ 6. Solución del primer problema con valores de contorno para la ecuación de conducción del calor por el método de diferencias finitas	381
§ 7. Propagación del calor en un vástago ilimitado	384
§ 8. Problemas que conducen a la investigación de las soluciones de la ecuación de Laplace. Planteo de los problemas con valores de contorno	389
§ 9. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Solución del problema de Dirichlet para un anillo con valores constantes de la función desconocida en las circunferencias interna y externa	395

§ 10. Solución del problema de Dirichlet para un círculo	397
§ 11. Solución del problema de Dirichlet por el método de diferencias finitas	401

Ejercicios

CAPITULO XIX. CALCULO OPERACIONAL Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

§ 1. Función inicial y su transformación (imagen)	409
§ 2. Imagen de las funciones $\sigma_0(t)$, $\sin t$, $\cos t$	411
§ 3. Imagen de la función con escala modificada de la variable independiente. Imagen de las funciones $\sin at$, $\cos at$	412
§ 4. Propiedad de linealidad de la imagen	413
§ 5. Teorema de desplazamiento	414
§ 6. Imágenes de las funciones e^{-at} , $\sinh at$, $\cosh at$, $e^{-at} \sin at$, $e^{-at} \cos at$	415
§ 7. Derivación de la imagen	416
§ 8. Imagen de las derivadas	418
§ 9. Tabla de algunas imágenes	420
§ 10. Ecuación auxiliar para la ecuación diferencial dada	421
§ 11. Teorema de descomposición	426
§ 12. Ejemplos de solución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales por el método operacional	428
§ 13. Teorema de convolución	430
§ 14. Ecuaciones diferenciales de oscilaciones mecánicas. Ecuaciones diferenciales de la teoría de circuitos eléctricos	432
§ 15. Solución de la ecuación diferencial de oscilaciones	433
§ 16. Investigación de las oscilaciones libres	435
§ 17. Investigación de las oscilaciones mecánicas y eléctricas en caso de aplicación de una fuerza periódica exterior	436
§ 18. Solución de la ecuación de oscilaciones en caso de resonancia	438
§ 19. Teorema de retardo	440
Ejercicios	
Índice alfabético de materias	442

ECUACIONES DIFERENCIALES

§ 1. PLANTEO DEL PROBLEMA
 ECUACION DEL MOVIMIENTO DE UN CUERPO,
 SIENDO LA RESISTENCIA DEL MEDIO
 PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD.
 ECUACION DE LA CATENARIA

Supongamos que la función $y = f(x)$ expresa cuantitativamente un fenómeno. Al estudiar este fenómeno es imposible establecer directamente el carácter de la dependencia entre y y x ; sin embargo, se puede establecer una dependencia entre las magnitudes x , y , y las derivadas de y respecto a x : y' , y'' , $\dots$, $y^{(n)}$, es decir, se puede escribir una ecuación diferencial.

De la dependencia obtenida entre x , y y las derivadas es preciso deducir la dependencia directa entre x e y , es decir, hallar $y = f(x)$, o, como suele decirse, **integrar una ecuación diferencial**.

Estudiemos dos ejemplos.

Ejemplo 1. Desde una cierta altura se ha arrojado un cuerpo de masa m . Determinar la ley según la cual cambia la velocidad de caída v , si sobre el cuerpo, además de la fuerza de gravedad, actúa la fuerza de resistencia del aire, proporcional a la velocidad v (el coeficiente de proporcionalidad es k), es decir, es preciso encontrar $v = f(t)$.

Solución. En virtud de la segunda ley de Newton $m \frac{dv}{dt} = F$, donde, $\frac{dv}{dt}$ es la aceleración del cuerpo en movimiento (la derivada de la velocidad respecto al tiempo), y F es una fuerza que actúa sobre el cuerpo en la dirección del movimiento. Esta última es resultante de dos fuerzas: la de gravedad, mg , y la de la resistencia del aire, kv (se toma con signo menos, puesto que está dirigida en dirección opuesta a la velocidad).

Entonces

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \quad (1)$$

Hemos obtenido una relación entre una función desconocida v y su derivada $\frac{dv}{dt}$, es decir, una ecuación diferencial respecto a la función desconocida v (la ecuación del movimiento de paracaídas de ciertos tipos). Resolver esta ecuación diferencial significa encontrar una función $v = f(t)$ tal que satisfaga idénticamente a la ecuación diferencial dada. Existe una infinidad de funciones de este tipo. Es fácil comprobar que toda función del tipo

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \quad (2)$$

satisface la ecuación (1) cualquiera que sea el número constante C . ¿Pero, cuál de estas funciones dará la dependencia buscada entre v y t ? Para encontrarla, usemos una condición adicional: al arrojar el cuerpo, le damos una velocidad inicial v_0 (que, en particular, puede ser igual a cero); supongamos conocida esta velocidad inicial. Pero, en este caso, la función buscada $v = f(t)$ debe ser tal que para $t = 0$ (al principio del movimiento) se verifique la condición $v = v_0$. Poniendo $t = 0$, $v = v_0$ en la fórmula (2), obtenemos:

$$v_0 = C + \frac{mg}{k}, \text{ de donde: } C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

De esta manera se determina la constante C . Por consiguiente, la dependencia buscada entre v y t es:

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}. \quad (2')$$

De esta fórmula se deduce que si t es suficientemente grande, la velocidad v depende poco de v_0 .

Notemos que si $k = 0$ (es decir, la resistencia del aire no existe o es tan pequeña que podemos despreciarla), obtenemos el resultado*) bien conocido en física:

$$v = v_0 + gt. \quad (2'')$$

Esta función satisface la ecuación diferencial (1) y la condición inicial: $v = v_0$ para $t = 0$.

Ejemplo 2. Un hilo flexible homogéneo está suspendido por sus dos extremos. Hallar la ecuación de la curva cuya forma va a tomar el hilo bajo su propio peso (esta forma es la que toman las cuerdas, cables y cadenas suspendidas).

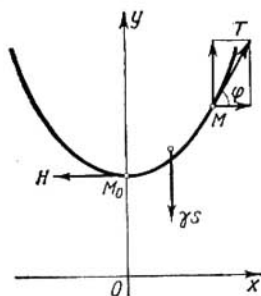


Fig. 244

Solución. Sea $M_0(0, b)$ el punto más bajo del hilo, y M , un punto arbitrario (fig. 244). Examinemos la parte M_0M del hilo. Esta parte está equilibrada bajo la acción de tres fuerzas:

- 1) la tensión T , que actúa a lo largo de la tangente al punto M , y forma con el eje Ox el ángulo φ ;
- 2) la tensión H , en el punto M_0 , que actúa horizontalmente;
- 3) el peso γs del hilo, dirigido verticalmente hacia abajo; donde s es la longitud del arco M_0M , γ es el peso específico lineal del hilo.

Descomponiendo T en sus componentes horizontal y vertical, obtenemos las ecuaciones del equilibrio: $T \cos \varphi = H$, $T \sin \varphi = \gamma s$.

Dividiendo la segunda igualdad por la primera, obtenemos:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma}{H} s. \quad (3)$$

*) La fórmula (2'') puede obtenerse de la (2'), pasando al límite:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left[\left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k} \right] = v_0 + gt.$$

Supongamos ahora que la ecuación de la curva buscada se puede escribir en la forma: $y = f(x)$. Aquí, $f(x)$ es la función que debemos encontrar. Notemos que

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} S, \quad (4)$$

donde por a está designada la razón $\frac{H}{\gamma}$.

Derivemos respecto a x ambos miembros de la igualdad (4):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx}. \quad (5)$$

Pero ya sabemos (véase § 1, cap. VI) que:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Poniendo esta expresión en la ecuación (5) obtenemos la ecuación diferencial de la curva buscada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (6)$$

Esta función expresa la relación entre derivadas primera y segunda de la función desconocida y .

Sin prestar atención a los métodos de resolución de ecuaciones, indiquemos que toda función de la forma

$$y = \frac{a}{2} \left[e^{+\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right] + C_2 \quad (7)$$

satisface la ecuación (6), cualesquiera que sean los valores de las constantes C_1 y C_2 . Esto es fácil comprobar, introduciendo las derivadas primera y segunda de la función mencionada en la ecuación (6). Indiquemos sin demostración que estas funciones (para diferentes C_1 y C_2) abarcan todas las soluciones posibles de la ecuación (6), lo que será demostrado más adelante (en el § 18).

Las gráficas de todas las funciones obtenidas de esta manera se llaman *catenarias*. Aclaremos, ahora, como se debe elegir las constantes C_1 y C_2 para obtener precisamente la catenaria en la que el punto inferior M tenga las coordenadas $(0, b)$. Puesto que, para $x = 0$, el punto de la catenaria ocupa la posición más baja, la tangente a este punto es horizontal, es decir, $\frac{dy}{dx} = 0$. Además, según la hipótesis, en el punto indicado la ordenada es igual a b , es decir $y = b$.

De la ecuación (7) se deduce:

$$y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right).$$

Poniendo aquí $x=0$, obtenemos: $0 = \frac{1}{2} (e^{C_1} - e^{-C_1})$. Por tanto, $C_1 = 0$.

Si b es la ordenada del punto M_0 , entonces $y = b$ para $x = 0$.

Suponiendo que $x = 0$, $C_1 = 0$ de la ecuación (7) obtenemos $b = \frac{a}{2}(1 + 1) + C_2$, de donde: $C_2 = b - a$.

En definitiva encontramos:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + b - a.$$

La ecuación (7) se simplifica considerablemente, si tomamos la ordenada del punto M_0 igual al número a . Entonces, la ecuación de la catenaria será:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

§ 2. DEFINICIONES

Definición 1. Una ecuación que establece una relación entre la variable independiente x , la función buscada $y = f(x)$ y sus derivadas y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ se llama *ecuación diferencial*.

Una ecuación diferencial se puede escribir simbólicamente en la forma siguiente:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ó

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Si la función buscada $y = f(x)$ es la de **una sola** variable independiente, la ecuación diferencial se llama *ordinaria*. Ocupémonos, por ahora, sólo de las ecuaciones diferenciales ordinarias*).

Definición 2. El orden de la derivada superior que entra en la ecuación se llama *orden* de la ecuación diferencial.

Por ejemplo, la ecuación

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

es de primer orden.

*) A la par con las ecuaciones diferenciales ordinarias, en el análisis matemático se estudian también las ecuaciones en derivadas parciales. Las ecuaciones que establecen una relación entre la función desconocida z , dependiente de dos o varias variables $x, y, \dots$, las propias variables $x, y, \dots$, y las derivadas parciales de z : $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc., se llaman *ecuaciones en derivadas parciales*.

Por ejemplo, la ecuación $x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}$ será en derivadas parciales con la función desconocida $z(x, y)$.

Es fácil comprobar que la función $z = x^2 y^2$ satisface la ecuación dada (así como infinidad de otras funciones). En el curso presente las ecuaciones en derivadas parciales se estudian en el capítulo XVIII, tomo II.

La ecuación

$$y'' + ky' - by - \operatorname{sen} x = 0$$

es de segundo orden, etc.

La ecuación examinada en el ejemplo 1 del párrafo anterior es de primer orden, y la del ejemplo 2, de segundo orden.

Definición 3. Toda función $y = f(x)$ que, introducida en la ecuación, la transforma en una identidad, se llama *solución o integral* de una ecuación diferencial.

Ejemplo 1. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = 2 \cos x$, $y = 3 \operatorname{sen} x - \cos x$, y, en general, toda función de la forma $y = C_1 \operatorname{sen} x$, $y = C_2 \cos x$,

ó

$$y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

son soluciones de la ecuación dada cualesquiera que sean las constantes C_1 y C_2 . Esto es fácil comprobar, al introducir las funciones mencionadas en la ecuación.

Ejemplo 2. Examinemos la ecuación:

$$y'x - x^2 - y = 0.$$

Sus soluciones son funciones de la forma:

$$y = x^2 + Cx,$$

donde C es una constante arbitraria. En efecto, derivando la función $y = x^2 + Cx$, hallamos:

$$y' = 2x + C.$$

Sustituyendo las expresiones y e y' en la ecuación original, obtenemos la identidad:

$$(2x + C)x - x^2 - x^2 - Cx = 0.$$

Cada una de las ecuaciones examinadas en los ejemplos 1 y 2 tiene una infinidad de soluciones.

§ 3. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN (GENERALIDADES)

1. La ecuación diferencial de **primer** orden tiene la forma:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Si esta ecuación se resuelve respecto a y' , se puede escribirla en la forma:

$$y' = f(x, y). \quad (1')$$

En este caso se dice que la ecuación diferencial está solucionada respecto a la derivada. Para tal ecuación es válido el siguiente teorema acerca de la existencia y la unicidad de la solución de una ecuación diferencial.

Teorema. Si en la ecuación

$$y' = f(x, y)$$

la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ respecto a y son continuas en cierto dominio D del plano Oxy , y si (x_0, y_0) es un punto de este dominio, entonces existe la única solución de esta ecuación, $y = \varphi(x)$, que satisface la condición $y = y_0$, para $x = x_0$.

El significado geométrico del teorema es que existe sólo la única función $y = \varphi(x)$ cuya gráfica pasa por el punto (x_0, y_0) .

Del teorema anterior se deduce que la ecuación (1') tiene una infinidad de soluciones diferentes [por ejemplo, la solución cuya gráfica pasa por el punto (x_0, y_0) , otra solución cuya gráfica pasa por el punto (x_0, y_1) , por el punto (x_0, y_2) etc., siempre cuando estos puntos se encuentren en el dominio D].

La condición de que la función y debe tomar valor del número dado y_0 , para $x = x_0$, se llama *condición inicial*. Muy a menudo esta condición se escribe en la forma:

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Definición 1. Se llama *solución general* de una ecuación diferencial de primer orden a la función

$$y = \varphi(x, C), \quad (2)$$

que depende de una constante arbitraria C y satisface las condiciones siguientes:

a) satisface la ecuación diferencial para cualquier valor concreto de la constante C ;

b) cualquiera que sea la condición inicial $y = y_0$, para $x = x_0$, es decir $(y)_{x=x_0} = y_0$, se puede encontrar un valor $C = C_0$ tal, que la función $y = \varphi(x, C_0)$ satisfaga la condición inicial dada.

En este caso se supone que los valores x_0 e y_0 pertenecen al dominio de variación de las variables x e y , en el que se verifican las condiciones del teorema sobre la existencia y la unicidad de la solución.

2. Durante la búsqueda de la solución general de una ecuación diferencial llegamos a menudo a una correlación de la forma:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (2')$$

no resuelta respecto a y . Al resolverla respecto a y , obtenemos la solución general. Sin embargo, no siempre es posible expresar y a partir de la correlación (2') mediante las funciones elementales. En tales casos la solución general se queda en forma implícita.

Una igualdad de la forma $\Phi(x, y, C) = 0$, que da la solución general en forma implícita, se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

Definición 2. Toda función $y = \varphi(x, C_0)$ deducida de la solución general $y = \varphi(x, C)$, dando a la constante C un valor determinado $C = C_0$, se llama *solución particular*. En este caso la correlación $\Phi(x, y, C_0) = 0$ se llama *integral particular* de la ecuación.

Ejemplo 1. La ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

tiene por solución general una familia de funciones $y = \frac{C}{x}$; esto se puede comprobar mediante una simple sustitución en la ecuación.

Hallemos una solución particular que satisfaga la siguiente condición inicial: $y_0 = 1$, para $x_0 = 2$. Poniendo estos valores en la fórmula $y = \frac{C}{x}$, obtenemos: $1 = \frac{C}{2}$ ó $C = 2$. Por consiguiente, la función $y = \frac{2}{x}$ es la solución particular buscada.

Desde un punto de vista geométrico, la integral general representa una familia de curvas en el plano de coordenadas, dependiente de una constante arbitraria C (o, como se suele decir, de un parámetro C). Estas curvas se llaman *curvas integrales* de la ecuación diferencial dada.

Cada integral particular está representada por una curva de esta familia, que pasa por un punto dado del plano.

Así, en último ejemplo la integral general está representada geoméricamente mediante la familia de hipérbolas $y = \frac{C}{x}$, y la integral particular, determinada por la condición inicial indicada, mediante una de estas hipérbolas que pasa por el punto $M_0(2, 1)$. En la figura 245 están representadas las curvas de la familia que corresponden a ciertos valores del parámetro: $C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $C = 2$, $C = -1$, etc.

Con el objeto de ilustrar mejor nuestros razonamientos, llamaremos **solución de la ecuación** no sólo a la función $y = \varphi(x, C_0)$, que satisface la ecuación, sino también a la **curva integral** correspondiente. En relación con esto trataremos, por ejemplo, de la **solución que pasa por el punto** (x_0, y_0) .

Observación: La ecuación $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ no tiene solución que pase por un punto del eje Oy (véase fig. 245). Esto se debe a que el segundo miembro de la ecuación no está definido para $x = 0$, y, por tanto, no es continuo.

Solucionar o, como se dice a menudo, **integrar** una ecuación diferencial significa:

a) encontrar su solución general o la integral general (si no están dadas las condiciones iniciales), o

b) hallar la solución particular de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales dadas (si éstas existen).

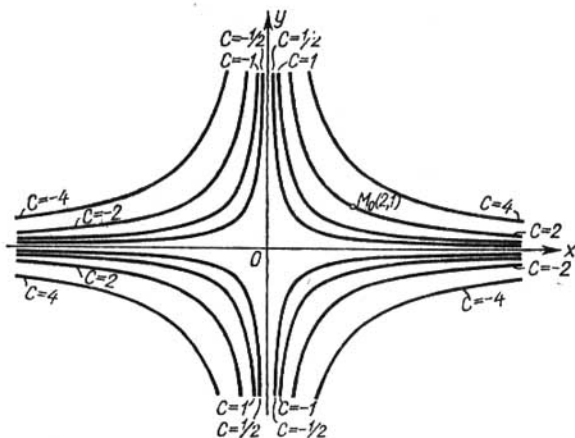


Fig. 245

3. Demos la interpretación geométrica de la ecuación diferencial de primer orden.

Sea una ecuación diferencial, resuelta respecto a la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1')$$

y sea $y = \varphi(x, C)$ su solución general. Esta solución general determina toda la familia de curvas integrales en el plano Oxy .

Para todo punto M , de coordenadas x e y , la ecuación $(1')$ determina un valor de la derivada $\frac{dy}{dx}$, es decir, el coeficiente angular de

la tangente a la curva integral que pasa por este punto. Por consiguiente, la ecuación diferencial $(1')$ define un conjunto de direcciones o, como se dice, determina el *campo de direcciones* en el plano Oxy .

Desde el punto de vista geométrico el problema de la integración de una ecuación diferencial consiste en hallar las curvas, cuyas tangentes están orientadas de modo que su dirección coincida con la dirección del campo en estos puntos.

En la figura 246 se representa el campo de direcciones definido por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

4. Examinemos, ahora, el problema siguiente:

Sea una familia de funciones que depende sólo de un parámetro C :

$$y = \varphi(x, C) \quad (2)$$

de modo que por todo punto del plano (o de un dominio en el plano) pase sólo una curva de esta familia.

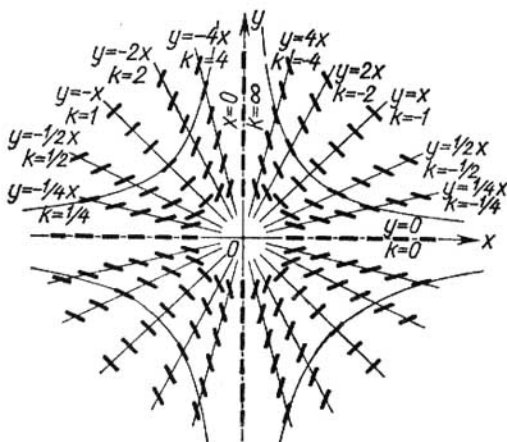


Fig. 246

¿Cuál es la ecuación diferencial que acepta esta familia de funciones como integral general?

Derivando respecto a x , encontramos de la relación (2):

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C). \quad (3)$$

Puesto que por todo punto del plano pasa una sola curva de la familia, para cada par de números x e y se determina un valor único C de la ecuación (2). Introduciendo este valor C en la correlación (3) hallamos $\frac{dy}{dx}$ como función de x e y . Así obtenemos la ecuación diferencial satisfecha por toda función de la familia (2).

Por consiguiente, para establecer la relación entre x , y y $\frac{dy}{dx}$, es decir, para escribir la ecuación diferencial cuya integral general se determina por la fórmula (2), es preciso eliminar C de (2) y (3).

Ejemplo 2. Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas $y = Cx^2$ (fig. 247).

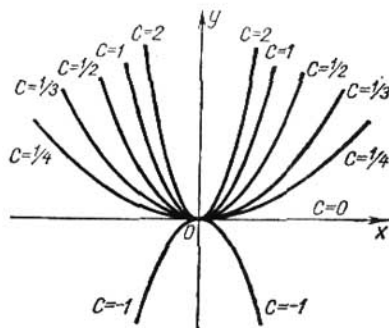


Fig. 247

Derivando la ecuación respecto a x , hallamos:

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx.$$

Introduciendo en esta última el valor

$$C = \frac{y}{x^2},$$

definido por la ecuación de la familia, obtenemos una ecuación derivable de la familia dada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Esta ecuación diferencial se verifica para $x \neq 0$, es decir, en todo dominio que no tenga puntos en el eje Oy .

§ 4. ECUACIONES CON VARIABLES SEPARADAS Y SEPARABLES. PROBLEMA DE LA DESINTEGRACION DEL RADIO

Estudiemos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \quad (1)$$

donde el segundo miembro es el producto obtenido mediante la multiplicación de una función que depende sólo de x por una función dependiente sólo de y . Suponiendo que $f_2(y) \neq 0$, transformemos (1) del modo siguiente:

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx. \quad (1')$$

Suponiendo que la función y de x es conocida, la ecuación (1') se puede considerar como igualdad de dos diferenciales, cuyas integrales indefinidas se diferenciarán en un sumando constante. Integrando el primer miembro respecto a y y el segundo, respecto a x , obtenemos

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C.$$

Hemos obtenido una correlación entre la solución y , la variable independiente x y la constante arbitraria C , es decir, hemos obtenido la integral general de la ecuación (1).

1. La ecuación diferencial de la forma (1')

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (2)$$

se llama ecuación con *variables separadas*. Según lo demostrado, su integral general es

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C.$$

Ejemplo 1. Sea la ecuación con variables separadas:

$$x dx + y dy = 0.$$

Integrando, obtenemos la integral general:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Puesto que el primer miembro de la última ecuación no es negativo, lo mismo será el segundo miembro. Designemos $2C_1$ por C^2 :

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Esta es la ecuación de una familia de circunferencias concéntricas (fig. 248) de radio C y centro en el origen de coordenadas.

2. La ecuación de la forma

$$M_1(x) N_1(y) dx + M_2(x) N_2(y) dy = 0 \quad (3)$$

se llama ecuación con *variables separables*. Esta puede ser reducida*)

*) Estas transformaciones son válidas sólo en un dominio donde tanto $N_1(y)$, como $M_2(x)$ no se anulan.

a una ecuación con variables separadas, dividiendo ambos miembros por la expresión $N_1(y) M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x) N_1(y)}{N_1(y) M_2(x)} dx + \frac{M_2(x) N_2(y)}{N_1(y) M_2(x)} dy = 0$$

o

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0,$$

es decir, a una ecuación de la forma (2).

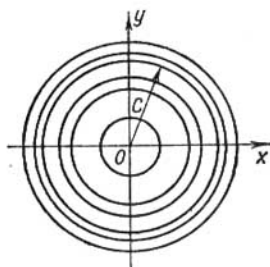


Fig. 248

Ejemplo 2. Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Separemos las variables:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Integrando, encontramos:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

es decir,

$$\ln |y| = -\ln |x| + \ln |C| \text{ *) } \quad \text{ó} \quad \ln |y| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|;$$

de donde obtenemos la solución general: $y = \frac{C}{x}$.

*) Teniendo en cuenta las transformaciones ulteriores, hemos designado la constante arbitraria mediante $\ln |C|$ lo que es admisible puesto que $\ln |C|$ (cuando $C \neq 0$) puede tomar cualquier valor en los límites de $-\infty$ hasta $+\infty$.

Ejemplo 3. Sea la ecuación

$$(1+x)y \, dx + (1-y)x \, dy = 0.$$

Separando las variables, encontramos:

$$\frac{1+x}{x} \, dx + \frac{1-y}{y} \, dy = 0; \quad \left(\frac{1}{x} + 1\right) \, dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) \, dy = 0.$$

Integrando, obtenemos:

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C \quad \text{ó} \quad \ln|xy| + x - y = C;$$

la última relación es la integral general de la ecuación dada.

Ejemplo 4. Se ha establecido que la velocidad de la desintegración del radio es directamente proporcional a su masa en cada instante dado. Determinar la ley de variación de la masa del radio en función de tiempo, si para $t = 0$ la masa del radio fue m_0 .

La velocidad de la desintegración se determina del modo siguiente. Sea m la masa al instante t y $m + \Delta m$, al instante $t + \Delta t$. La masa desintegrada durante el tiempo Δt es Δm . La razón $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ es la velocidad media de desintegración. El límite de esta razón para $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

es la *velocidad de desintegración* del radio al instante t .

Según la hipótesis:

$$\frac{dm}{dt} = -km, \quad (4)$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad ($k > 0$). Ponemos el signo menos, porque a medida que transcurre el tiempo la masa del radio disminuye y, por eso: $\frac{dm}{dt} < 0$. La ecuación (4) es una ecuación con variables separables. Separemos las variables:

$$\frac{dm}{m} = -k \, dt,$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos:

$$\ln m = -kt + \ln C,$$

de donde

$$\begin{aligned} \ln \frac{m}{C} &= -kt, \\ m &= Ce^{-kt}. \end{aligned} \quad (5)$$

Siendo dada la masa del radio, igual a m_0 en el instante $t = 0$, entonces C debe satisfacer la correlación:

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C.$$

Introduciendo el valor de C en la ecuación (5), obtenemos la dependencia buscada (véase la fig. 249) de la masa del radio en función del tiempo:

$$m = m_0 e^{-kt}. \quad (6)$$

El coeficiente k se determina experimentalmente de la manera siguiente. Sea α el % de la masa inicial del radio desintegrada durante el tiempo t_0 . Por

tanto se cumple la correlación:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-kt_0},$$

de donde:

$$-kt_0 = \ln \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right),$$

o

$$k = -\frac{1}{t_0} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right).$$

De tal modo hemos establecido que para el radio $k = 0,00044$ (la unidad de medida del tiempo es el año).

Poniendo este valor de k en la fórmula (6), tenemos:

$$m = m_0 e^{-0,00044t}.$$

Hallemos el período de semidesintegración del radio, o sea el intervalo de tiempo durante el cual se desintegra la mitad de la masa inicial del radio.

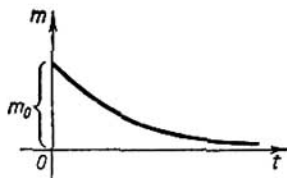


Fig. 249

Sustituyendo m en la última fórmula por el valor $\frac{m_0}{2}$, obtenemos la ecuación para determinar el período T de semidesintegración:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0,00044T},$$

de donde:

$$-0,00044T = -\ln 2.$$

o sea,

$$T = \frac{\ln 2}{0,00044} = 1590 \text{ años}.$$

Notemos que muchos otros problemas físicos y químicos desembocan en una ecuación de la forma (4).

Observación. La ecuación diferencial con variables separadas de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{ó} \quad dy = f(x) dx$$

es la más simple.

Su integral general tiene la forma:

$$y = \int f(x) dx + C.$$

A la solución de ecuaciones de este tipo está dedicado el capítulo X.

§ 5. ECUACIONES HOMOGÉNEAS DE PRIMER ORDEN

Definición 1. La función $f(x, y)$ se llama *homogénea de grado n* respecto a las variables x y y , si para todo λ se verifica la identidad:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Ejemplo 1. La función $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ es homogénea de primer grado, puesto que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y).$$

Ejemplo 2. $f(xy) = xy - y^2$ es una función homogénea de segundo grado puesto que $(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2 [xy - y^2]$.

Ejemplo 3. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ es una función homogénea de grado cero puesto que $\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$; es decir,

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \quad \text{ó} \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y).$$

Definición 2. La ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

se llama *homogénea* respecto a x e y , si la función $f(x, y)$ es homogénea de grado cero respecto a x e y .

Solución de una ecuación homogénea. Según la hipótesis, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Haciendo $\lambda = \frac{1}{x}$, tenemos:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

es decir, la función homogénea de grado cero depende sólo de la razón de los argumentos.

En este caso, la ecuación (1) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{1'}$$

Efectuemos la sustitución: $u = \frac{y}{x}$, es decir, $y = ux$. Entonces tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x.$$

Sustituyendo este valor de la derivada en (1') obtenemos:

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u),$$

que es una ecuación con variables separables:

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u \quad \text{ó} \quad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando, hallamos:

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Sustituyendo u por la razón $\frac{y}{x}$, después de integrar, obtenemos la integral de la ecuación (1').

Ejemplo 4. Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

En el segundo miembro tenemos una función homogénea de grado cero. Por consiguiente, se trata de una ecuación homogénea. Realicemos la sustitución: de $\frac{y}{x} = u$; entonces

$$y = ux; \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}; \quad u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - u^2}; \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1 - u^2}.$$

Separando las variables, resulta:

$$\frac{(1 - u^2) du}{u^3} = \frac{dx}{x}; \quad \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} \right) du = \frac{dx}{x};$$

de donde, después de integrar, encontramos:

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln |u| = \ln |x| + \ln |C| \quad \text{ó} \quad -\frac{1}{2u^2} = \ln |uxC|.$$

Sustituyendo $u = \frac{y}{x}$ obtenemos la integral general de la ecuación inicial:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln |Cy|.$$

Es imposible en el caso dado expresar y como función explícita de x mediante las funciones elementales. Sin embargo, es fácil expresar x en función de y :

$$x = y \sqrt{-2 \ln |Cy|}.$$

Observación. La ecuación de la forma

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

será homogénea sólo en aquel único caso, en que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ sean funciones homogéneas de un mismo grado. Esto se deduce del hecho de que la razón de dos funciones homogéneas de un mismo grado es una función homogénea de grado cero.

Ejemplo 5. Las ecuaciones

$$(2x+3y) dx + (x-2y) dy = 0,$$

$$(x^2+y^2) dx - 2xy dy = 0$$

son homogéneas.

§ 6. ECUACIONES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Se reducen a ecuaciones homogéneas las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}. \quad (1)$$

Si $c_1 = c = 0$, la ecuación (1) es, evidentemente, homogénea. Supongamos, ahora, que c y c_1 (o uno de ellos) son diferentes de cero. Realicemos el cambio de variables:

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k.$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}. \quad (2)$$

Introduciendo en la ecuación (2) las expresiones de x , y y $\frac{dy}{dx}$, tenemos:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}. \quad (3)$$

Elijamos h y k de tal modo que se verifiquen las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} ah + bk + c &= 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

es decir, determinemos h y k como soluciones del sistema de ecuaciones (4). Bajo esta condición la ecuación (3) es homogénea:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}.$$

Al solucionar esta ecuación, y pasando de nuevo a x e y , según las fórmulas (2), obtenemos la solución de la ecuación (1).

El sistema (4) no tiene solución, si $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, es decir, si

$ab_1 = a_1b$. Pero en este caso $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, es decir, $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$,

y, por consiguiente, se puede transformar la ecuación (1) en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}. \quad (5)$$

Haciendo la sustitución

$$z = ax + by, \quad (6)$$

la ecuación se reduce a una ecuación con variables separables.

En efecto,

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx},$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \quad (7)$$

Poniendo las expresiones (6) y (7) en la ecuación (5) obtenemos:

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1},$$

que es una ecuación con variables separables.

El procedimiento utilizado para la integración de la ecuación (1) se aplica, también, a la integración la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

donde, f es una función continua arbitraria.

Ejemplo 1. Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}.$$

Para transformarla en una ecuación homogénea hacemos la sustitución: $x = x_1 + h$; $y = y_1 + k$. Entonces,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}.$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones

$$h + k - 3 = 0; \quad h - k - 1 = 0,$$

encontramos:

$$h = 2, \quad k = 1.$$

Como resultado obtenemos la ecuación homogénea

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1},$$

que resolvemos mediante la sustitución $\frac{y_1}{x_1} = u$; entonces,

$$y_1 = ux_1, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1}; \quad u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u},$$

y obtenemos una ecuación con variables separables

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Separamos las variables:

$$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Integrando, hallamos:

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln x_1 + \ln C,$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln(Cx_1 \sqrt{1+u^2})$$

o

$$Cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\operatorname{arctg} u}.$$

Sustituyendo u por $\frac{y_1}{x_1}$ en la última igualdad, tenemos:

$$C \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1}}.$$

Por fin pasando a las variables x e y , obtenemos en definitiva:

$$C \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y-1}{x-2}}.$$

Ejemplo 2. La ecuación

$$y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

no se puede resolver mediante la sustitución $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$, puesto que en este caso el sistema de ecuaciones, que sirve para determinar h y k , es irresoluble (aquí, el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ de los coeficientes de las variables es igual a cero).

Se puede reducir esta ecuación a una ecuación con variables separables mediante la sustitución:

$$2x + y = z.$$

Entonces $y' = z' - 2$ y la ecuación se reduce a la forma:

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5},$$

o sea,

$$z' = \frac{5z+9}{2z+5}$$

Resolviéndola, encontramos:

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln |5z + 9| = x + C.$$

Como $z = 2x + y$, obtenemos la solución definitiva de la ecuación inicial en la forma:

$$\frac{2}{5}(2x + y) + \frac{7}{25} \ln |10x + 5y + 9| = x + C$$

ó

$$10y - 5x + 7 \ln |10x + 5y + 9| = C_1,$$

es decir, en la forma de una función implícita y de x .

§ 7. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Difinición. La ecuación que es lineal respecto a la función desconocida y su derivada, se llama *ecuación lineal de primer orden*. La ecuación tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas dadas de x (o constantes).

Resolución de la ecuación lineal (1). Busquemos la solución de la ecuación (1) en la forma de un producto de dos funciones de x :

$$y = u(x)v(x). \quad (2)$$

Se puede tomar arbitrariamente una de estas funciones, la otra se determinará entonces según la ecuación (1).

Derivando los dos miembros de la igualdad (2) encontramos:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Poniendo la expresión obtenida de la derivada $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación (1), tenemos:

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v + Puv = Q$$

6

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q. \quad (3)$$

Elijamos la función v de tal manera que

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \quad (4)$$

Separando las variables en esta ecuación diferencial respecto a la función v , encontramos:

$$\frac{dv}{v} = -P dx.$$

Integrando, obtenemos:

$$-\ln C_1 + \ln v = -\int P dx$$

6

$$v = C_1 e^{-\int P dx}$$

Puesto que es suficiente tener una solución cualquiera, distinta de cero, de la ecuación (4), tomemos por la función $v(x)$:

$$v(x) = e^{-\int P dx}, \quad (5)$$

donde $\int P dx$ es una función primitiva cualquiera. Es evidente que $v(x) \neq 0$. Sustituyendo el valor encontrado de $v(x)$ en la ecuación (3), obtenemos (teniendo en cuenta que $\frac{dv}{dx} + Pv = 0$)

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x),$$

o sea,

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

de donde:

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (2) obtenemos en definitiva:

$$y = v(x) \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right],$$

o

$$y = v(x) \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + Cv(x). \quad (6)$$

Observación: Es evidente que la expresión (6) no variará, si, en lugar de la función $v(x)$ determinada por la ecuación (5), tomamos alguna otra función $v_1(x) = \bar{C}v(x)$. En efecto, sustituyendo en (6)

$v(x)$ por $v_1(x)$, obtenemos:

$$y = \bar{C}v(x) \int \frac{Q(x)}{\bar{C}v(x)} dx + C\bar{C}v(x).$$

En el primer término se elimina $\bar{C}$, en el segundo término el producto $C\bar{C}$ es una constante arbitraria la que designemos por C y regresamos de nuevo a la expresión (6). Si designamos:

$$\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx = \varphi(x)$$

la expresión (6) toma la forma

$$y = v(x) \varphi(x) + Cv(x). \quad (6')$$

Es evidente que (6') es la integral general, puesto que se puede elegir C de tal modo que se satisfaga la condición inicial $y = y_0$ para $x = x_0$.

El valor de C se determina de la ecuación:

$$y_0 = v(x_0) \varphi(x_0) + Cv(x_0).$$

Ejemplo. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3.$$

Solución. Hagamos:

$$y = uv.$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

Introduciendo la expresión $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación inicial, tenemos:

$$\begin{aligned} u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - \frac{2}{x+1} uv &= (x+1)^3, \\ u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v \right) + v \frac{du}{dx} &= (x+1)^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Para determinar v , obtenemos la ecuación:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v = 0,$$

es decir,

$$\frac{dv}{v} = \frac{2 dx}{x+1},$$

de donde:

$$\ln v = 2 \ln(x+1),$$

o sea

$$v = (x+1)^2.$$

Introduciendo la expresión de la función v en la ecuación (7) obtenemos la ecuación para determinar u ,

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

ó

$$\frac{du}{dx} = (x+1),$$

de donde:

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación dada tendrá la forma:

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

La familia obtenida es la solución general. Cualquiera que sea la condición inicial (x_0, y_0) , donde $x_0 \neq -1$, siempre se puede elegir C de tal manera que la solución particular correspondiente satisfaga la condición inicial dada. Por ejemplo, la solución particular que satisface la condición $y_0 = 3$ para $x_0 = 0$ se encuentra del modo siguiente:

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2; \quad C = \frac{5}{2}.$$

Por tanto, la solución particular buscada es:

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2.$$

Sin embargo, si se toma la condición inicial (x_0, y_0) de modo tal que $x_0 = -1$, entonces no será posible encontrar una solución particular que satisfaga esta condición. Esto se explica por el hecho de que la función $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ es discontinua en el punto $x_0 = -1$ y, por tanto, no se cumplen las condiciones del teorema de la existencia de la solución.

§ 8. ECUACION DE BERNOULLI

Estudiemos una ecuación de la forma*)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (1)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de x (o constantes), $y, n \neq 0, n \neq 1$ (en el caso contrario resulta una ecuación lineal).

*) Esta ecuación se reduce del problema sobre el movimiento de un cuerpo, si la resistencia F del medio depende de la velocidad: $F = \lambda_1 v + \lambda_2 v^n$. La ecuación del movimiento será $m \frac{dv}{dt} = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^n$, ó $\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda_1}{m} v = -\frac{\lambda_2}{m} v^n$.

Esta ecuación, llamada *de Bernoulli*, se reduce a una ecuación lineal mediante la siguiente transformación:

Dividiendo todos los términos de la ecuación por y^n , obtenemos:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P y^{-n+1} = Q. \quad (2)$$

Efectuemos ahora la sustitución:

$$z = y^{-n+1}.$$

Entonces,

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1) y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (2), obtenemos una ecuación lineal:

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1) Pz = (-n+1) Q.$$

Al encontrar su integral general, y sustituyendo z por su expresión y^{-n+1} , obtenemos la integral general de la ecuación de Bernoulli.

Ejemplo. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3. \quad (3)$$

Solución. Dividiendo todos los términos por y^3 , tenemos:

$$y^{-3} y' + x y^{-2} = x^3. \quad (4)$$

Introduzcamos una nueva función:

$$z = y^{-2},$$

entonces,

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (4), obtenemos la ecuación lineal:

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3. \quad (5)$$

Hallems ahora su integral general:

$$z = uv; \quad \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

Sustituyendo las expresiones de z y $\frac{dz}{dx}$ en la ecuación (5), obtenemos:

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - 2xuv = -2x^3$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Igualemos a cero la expresión entre paréntesis:

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0; \quad \frac{dv}{v} = 2x dx;$$

$$\ln v = x^2; \quad v = e^{x^2}.$$

Para determinar u obtenemos la ecuación:

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Separaremos las variables:

$$du = -2e^{-x^2} x^3 dx, \quad u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx + C.$$

Integrando por partes, encontramos:

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C; \quad z = uv = x^2 + 1 + C e^{-x^2}.$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación dada es:

$$y^{-2} = x^2 + 1 + C e^{-x^2}, \quad \text{o sea: } y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + C e^{-x^2}}}.$$

Observación. Análogamente a lo que hemos hecho en el caso de las ecuaciones lineales se puede demostrar que es posible buscar la solución de la ecuación de Bernoulli en la forma de producto de dos funciones:

$$y = u(x) v(x),$$

donde $v(x)$ es una función arbitraria distinta de cero, que satisface la ecuación $v' + Pv = 0$.

§ 9. ECUACIONES EN DIFERENCIALES TOTALES

Definición. La ecuación

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \quad (1)$$

se llama *ecuación en diferenciales totales*, si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones continuas y derivables para las que se cumple la correlación:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (2)$$

siendo $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ continuas en un cierto dominio.

Integración de las ecuaciones en diferenciales totales. Demostremos que si el primer miembro de la ecuación (1) es una diferencial total, se cumple la condición (2), y, viceversa, si se cumple la

condición (2), entonces el primer miembro de la ecuación (1) es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, es decir, la ecuación (1) tiene la forma:

$$du(x, y) = 0 \quad (3)$$

y, por tanto, su integral general es $u(x, y) = C$.

Supongamos, primeramente, que el primer miembro de la ecuación (1) sea diferencial total de cierta función $u(x, y)$, es decir,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy;$$

entonces:

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Derivando la primera relación respecto a y , y la segunda, respecto a x , tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Suponiendo que las segundas derivadas son continuas, tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

es decir, la igualdad (2) es condición necesaria para que el primer miembro de la ecuación (1) sea diferencial total de cierta función $u(x, y)$. Mostremos que esta condición será también suficiente, es decir, si se cumple la igualdad (2), el primer miembro de la ecuación (1) es diferencial total de cierta función $u(x, y)$.

De la relación

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

hallamos que:

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y),$$

donde x_0 es la abscisa de un punto arbitrario en el dominio de existencia de la solución.

Integrando respecto a x , supongamos y constante. Por eso, la constante arbitraria de integración puede depender de y . Eligamos la función $\varphi(y)$ de tal modo que se cumpla la segunda de las corre-

laciones (4). Para esto derivemos*) ambos miembros de la última igualdad respecto a y e igualamos el resultado a $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y);$$

Pero, como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, se puede escribir:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N, \text{ es decir, } N(x, y)|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y),$$

6

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Por tanto,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

6

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Así pues, la función $u(x, y)$ tomará la forma:

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Aquí, $P(x_0, y_0)$ es un punto en cuya vecindad existe la solución de la ecuación diferencial (1).

Igualando esta expresión a una constante arbitraria C , obtenemos la integral general de la ecuación (1):

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C. \quad (5)$$

Ejemplo. Sea la ecuación

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

*) La integral $\int_{x_0}^x M(x, y) dx$ depende de y . Para hallar la derivada de esta integral respecto a y , es preciso derivar respecto a y el integrando:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx.$$

Ello se deduce del teorema de Leibniz sobre la derivación de una integral definida respecto a un parámetro. (Véase § 10, cap. XI, tomo I)

Averiguemos si esta ecuación está dada en diferenciales totales. Designemos:

$$M = \frac{2x}{y^3}; \quad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

entonces,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Para $y \neq 0$ se cumple la condición (2). Por tanto, el primer miembro de la ecuación dada es la diferencial total de cierta función desconocida $u(x, y)$. Hallamos esta función.

Puesto que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$, resulta:

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y),$$

donde $\varphi(y)$ es una función de y , que es preciso determinar.

Derivando respecto a y esta relación y tomando en cuenta que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4},$$

hallamos:

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

Por consiguiente,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^3}, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y^2} + C_1, \quad u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y^2} + C_1.$$

Así, la integral general de la ecuación inicial es:

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y^2} = C.$$

§ 10. FACTOR INTEGRANTE

Suponemos que el primer miembro de la ecuación

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

no es una diferencial total. Se logra a veces elegir una función $\mu(x, y)$ tal que, si multiplicamos todos los términos de la ecuación por esta función, el primer miembro se convierte en una diferencial total. La solución general de la ecuación así obtenida coincide con la solución general de la ecuación inicial; la función $\mu(x, y)$ se llama *factor integrante* de la ecuación (1).

Para hallar un factor integrante μ procedemos del modo siguiente: multipliquemos los dos miembros de la ecuación dada por el factor integrante μ , por ahora desconocido:

$$\mu M dx + \mu N dy = 0.$$

Para que la última ecuación esté dada en diferenciales totales es necesario y suficiente que se cumpla la relación

$$\frac{\partial (\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial (\mu N)}{\partial x},$$

es decir,

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

o sea

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Al dividir por μ los dos miembros de la última ecuación, obtenemos:

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (2)$$

Es evidente que toda función $\mu(x, y)$ que satisface la última ecuación es un factor integrante de la ecuación (1).

La ecuación (2) es una ecuación en derivadas parciales con una función desconocida μ , dependiente de dos variables x e y . Se puede demostrar que en ciertas condiciones la ecuación posee una infinidad de soluciones y, por tanto, la ecuación (1) tiene el factor integrante. Pero en el caso general el problema de la búsqueda de $\mu(x, y)$ de la ecuación (2) es más difícil que el de integrar la ecuación (1). Sólo en algunos casos particulares se logra determinar la función $\mu(x, y)$.

Supongamos, por ejemplo, que la ecuación (1) admita un factor integrante que depende sólo de y . Entonces,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0,$$

y para hallar μ obtenemos una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M},$$

de la que se determina (por medio de una cuadratura) $\ln \mu$ y, por tanto, el propio μ . Es evidente, que de esta manera se puede pro-

ceder sólo cuando la expresión $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ no depende de x .

Análogamente, si la expresión $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ no depende de y , sino exclusivamente de x , es fácil hallar el factor integrante que depende solamente de x .

Ejemplo. Hallar la solución de la ecuación

$$(y + xy^2) dx - x dy = 0.$$

Solución. Aquí: $M = y + xy^2$; $N = -x$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Por consiguiente, el primer miembro de la ecuación **no** es diferencial total. Examinemos si esta ecuación admite un factor integrante que depende sólo de y . Notemos que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y},$$

concluimos que la ecuación lo admite. Encontremos ahora este factor integrante:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\frac{2}{y};$$

de donde:

$$\ln \mu = -2 \ln y, \text{ es decir } \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Después de multiplicar todos los términos de la ecuación dada por el factor integrante determinado μ obtenemos la ecuación $\left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$ en diferenciales totales $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\right)$. Resolviéndola, encontramos su integral general:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0,$$

o

$$y = -\frac{2x}{x^2 + 2C}.$$

§ 11. ENVOLVENTE DE UNA FAMILIA DE CURVAS

Sea dada una ecuación de la forma

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (1)$$

donde x e y son las coordenadas variables de Descartes y C , un parámetro que pueda tomar diferentes valores fijados.

Para cada valor dado del parámetro C la ecuación (1) determina cierta curva en el plano Oxy . Dando a C todos los valores posibles obtenemos una familia de curvas que dependen de un solo parámetro, o, como suele decirse, una familia de curvas monoparamétrica. Así, la ecuación (1) es la ecuación de una familia de curvas monoparamétrica (puesto que contiene una sola constante arbitraria).

Definición. La línea L se llama *envolvente* de una familia de curvas monoparamétrica, si en cada uno de sus puntos toca una u otra

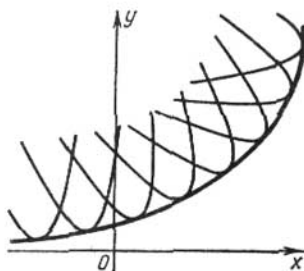


Fig. 250

curva de la familia, y también, diferentes curvas de la familia dada tocan la línea L en distintos puntos (fig. 250).

Ejemplo 1. Examinemos la familia de curvas

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2,$$

donde R es una constante, y C , un parámetro.

Es la ecuación de una familia de circunferencias de radio R y centros en el eje Ox . Es evidente que esta familia admite como envolventes las rectas $y = R$, $y = -R$ (fig. 251).

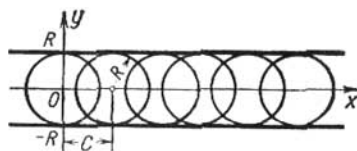


Fig. 251

Búsqueda de la ecuación de la envolvente de una familia dada. Sea la familia de curvas

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (1)$$

que dependen de un parámetro C .

Supongamos que esta familia tenga una envolvente cuya ecuación se puede escribir en la forma $y = \varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es una función continua y derivable de x . Examinemos un punto $M(x, y)$ que se halla en la envolvente. Este punto pertenece, también, a cierta curva de la familia (1). A esta curva corresponde un valor determinado del parámetro C , este valor para dadas (x, y) se define de la ecuación (1) $C = C(x, y)$. Por tanto, para todos los puntos de la envolvente se verifica la igualdad

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0. \quad (2)$$

Supongamos que $C(x, y)$ sea función derivable, no constante en ningún intervalo de los valores estudiados de x, y . Partiendo de la ecuación (2) de la envolvente, encontremos el coeficiente angular de la tangente a la envolvente en el punto $M(x, y)$. Derivemos la ecuación (2) respecto a x , considerando y como función de x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x} + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial y} \right] y' = 0$$

6

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right] = 0. \quad (3)$$

Luego, el coeficiente angular de la tangente a la curva de la familia (1) en el punto $M(x, y)$ se deduce de la ecuación:

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0 \quad (4)$$

(en la curva dada C es constante).

Supongamos que $\Phi'_y \neq 0$; en caso contrario consideremos x como la función e y , como el argumento. Puesto que el coeficiente angular k de la envolvente es igual al de la curva de la familia, de las ecuaciones (3) y (4) se deduce:

$$\Phi'_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right] = 0.$$

Pero como $C(x, y) \neq \text{const}$ en la envolvente, entonces:

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0,$$

por lo que para sus puntos es válida la igualdad:

$$\Phi'_C(x, y, C) = 0. \quad (5)$$

Así, para determinar la envolvente sirven las dos ecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Si, eliminando C de estas ecuaciones, obtenemos $y = \varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es una función derivable, siendo $C \neq \text{const}$ en esta curva, entonces $y = \varphi(x)$ es la ecuación de la envolvente.

Observación 1. Si una función $y = \varphi(x)$ es la ecuación del lugar geométrico de *puntos singulares* de la familia (1), es decir, de los puntos donde $\Phi'_x = 0$ y $\Phi'_y = 0$, entonces las coordenadas de estos puntos también satisfacen las ecuaciones (6).

En efecto, las coordenadas de los puntos singulares se pueden expresar en función del parámetro C que entra en la ecuación (1):

$$x = \lambda(C), \quad y = \mu(C). \quad (7)$$

Poniendo estas expresiones en la ecuación (1), obtenemos una identidad respecto a C :

$$\Phi[\lambda(C), \mu(C), C] = 0.$$

Derivando esta identidad respecto a C , obtenemos:

$$\Phi'_x \frac{d\lambda}{dC} + \Phi'_y \frac{d\mu}{dC} + \Phi'_C = 0;$$

puesto que para los puntos cualesquiera se cumplen las igualdades $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$, para estos puntos se cumple, también, la ecuación $\Phi'_C = 0$.

De esta manera hemos demostrado que las coordenadas de los puntos singulares satisfacen las ecuaciones (6).

Así, las ecuaciones (6) definen la envolvente, o bien el lugar geométrico de los puntos singulares de la familia (1), o bien la combinación de ambas cosas. Por consiguiente, al obtener una curva que satisface las ecuaciones (6), hace falta realizar un estudio con el objeto de determinar, si esta curva es envolvente o lugar geométrico de los puntos singulares.

Ejemplo 2. Hallar la envolvente de la familia de circunferencias

$$(x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

que dependen de un solo parámetro C .

Solución. Derivando la ecuación de la familia respecto a C , tenemos:

$$2(x - C) = 0.$$

Eliminando C de estas dos ecuaciones, obtenemos la ecuación:

$$y^2 - R^2 = 0 \quad \text{ó} \quad y = \pm R.$$

De consideraciones geométricas resulta que el par de rectas obtenido es la **envolvente** (y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las circunferencias que integran la familia no tienen puntos singulares).

Ejemplo 3. Hallar la envolvente de la familia de las rectas:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (a)$$

donde, α es un parámetro.

Solución. Derivando respecto a α la ecuación dada de la familia, tenemos:

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \quad (b)$$

Para eliminar el parámetro α de las ecuaciones (a) y (b), multipliquemos los términos de la primera ecuación por $\cos \alpha$ y los términos de la segunda,

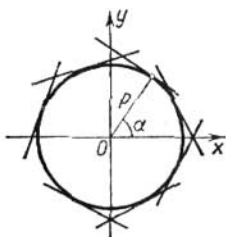


Fig. 252

por $\sin \alpha$. Luego restamos la segunda ecuación de la primera. En este caso obtenemos:

$$x = p \cos \alpha.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (b), hallamos:

$$y = p \sin \alpha.$$

Elevando al cuadrado los miembros de las dos últimas ecuaciones y sumándolas miembro a miembro obtenemos:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Es la ecuación de una circunferencia que sirve de **envolvente** de la familia de rectas (y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las rectas no tienen estos puntos) (fig. 252).

Ejemplo 4. Hallar la envolvente de las trayectorias de los proyectiles lanzados, por una pieza de artillería, con velocidad v_0 bajo diferentes ángulos de inclinación del cañón respecto al horizonte. Supongamos que los proyectiles son lanzados desde el origen de coordenadas y que sus trayectorias se hallan en el plano Oxy (despreciando la resistencia del aire).

Solución. Hallemos al principio la ecuación de la trayectoria de un proyectil lanzado bajo el ángulo α en la dirección positiva del eje Ox . Durante su vuelo el proyectil participa simultáneamente en dos movimientos: un movimiento uniforme en la dirección del lanzamiento, con velocidad v_0 ; y otro movimiento de caída por acción de la fuerza de gravedad.

De consideraciones geométricas resulta que el par de rectas obtenido es la **envolvente** (y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las circunferencias que integran la familia no tienen puntos singulares).

Ejemplo 3. Hallar la envolvente de la familia de las rectas:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (a)$$

donde, α es un parámetro.

Solución. Derivando respecto a α la ecuación dada de la familia, tenemos:

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \quad (b)$$

Para eliminar el parámetro α de las ecuaciones (a) y (b), multipliquemos los términos de la primera ecuación por $\cos \alpha$ y los términos de la segunda,

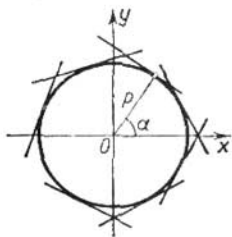


Fig. 252

por $\sin \alpha$. Luego restamos la segunda ecuación de la primera. En este caso obtenemos:

$$x = p \cos \alpha.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (b), hallamos:

$$y = p \sin \alpha.$$

Elevando al cuadrado los miembros de las dos últimas ecuaciones y sumándolas miembro a miembro obtenemos:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Es la ecuación de una circunferencia que sirve de **envolvente** de la familia de rectas (y no lugar geométrico de los puntos singulares, puesto que las rectas no tienen estos puntos) (fig. 252).

Ejemplo 4. Hallar la envolvente de las trayectorias de los proyectiles lanzados, por una pieza de artillería, con velocidad v_0 bajo diferentes ángulos de inclinación del cañón respecto al horizonte. Supongamos que los proyectiles son lanzados desde el origen de coordenadas y que sus trayectorias se hallan en el plano Oxy (despreciando la resistencia del aire).

Solución. Hallemos al principio la ecuación de la trayectoria de un proyectil lanzado bajo el ángulo α en la dirección positiva del eje Ox . Durante su vuelo el proyectil participa simultáneamente en dos movimientos: un movimiento uniforme en la dirección del lanzamiento, con velocidad v_0 ; y otro movimiento de caída por acción de la fuerza de gravedad.

Por eso, a cada instante t , la posición del proyectil M (fig. 253) está definida por las ecuaciones:

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria (el parámetro es el tiempo t).

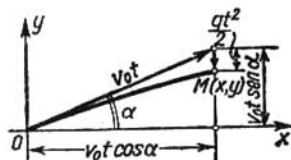


Fig. 253

Eliminando t , obtenemos la ecuación de la trayectoria en la siguiente forma:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

e introduciendo las designaciones: $\operatorname{tg} \alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$, obtenemos:

$$y = kx - ax^2(1 + k^2). \quad (8)$$

Esta ecuación define una parábola con el eje vertical, que pasa por el origen de coordenadas y las ramas dirigidas hacia abajo. Para distintos valores de k obtenemos trayectorias diferentes. La ecuación (8), por consiguiente,

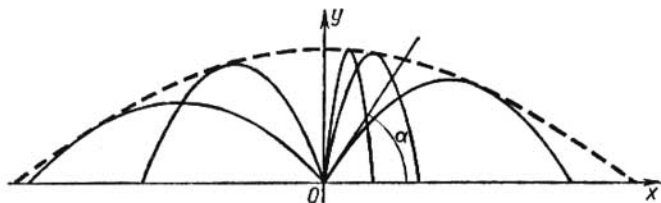


Fig. 254

es la ecuación de una familia monoparamétrica de parábolas que son las trayectorias del proyectil a diferentes ángulos α , con una velocidad inicial dada v_0 (fig. 254).

Halleemos la envolvente de esta familia de parábolas.

Derivando respecto a k ambos miembros de la ecuación (8), tenemos:

$$x - 2akx^2 = 0. \quad (9)$$

Eliminando k de las ecuaciones (8) y (9), obtenemos:

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2.$$

Es la ecuación de una parábola con el vértice en el punto $(0, \frac{1}{4a})$, cuyo eje coincide con el Oy . Esta ecuación no es un lugar geométrico de los puntos

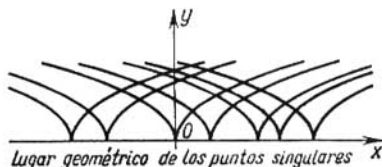


Fig. 255

singulares (puesto que las parábolas (8) no tiene puntos singulares). Así, la parábola

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

es envolvente para la familia de trayectorias. Se llama **parábola de seguridad**, puesto que ningún punto situado fuera de sus límites puede ser alcanzado por un proyectil lanzado de este cañón dado con la velocidad inicial v_0 .

Ejemplo 5. Hallar la envolvente de la familia de parábolas semicúbicas

$$y^3 - (x - C)^2 = 0.$$

Solución. Derivemos la ecuación dada de la familia respecto al parámetro C :

$$2(x - C) = 0.$$

Eliminando el parámetro C de ambas ecuaciones, obtenemos:

$$y = 0.$$

El eje Ox es un lugar geométrico de los puntos singulares: los de retroceso de primera especie (fig. 255). En efecto, hallemos los puntos singulares de la curva

$$y^3 - (x - C)^2 = 0,$$

fijando el valor de C . Derivando respecto a x e y , hallamos:

$$F'_x = -2(x - C) = 0;$$

$$F'_y = 3y^2 = 0.$$

Resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones anteriores, hallamos las coordenadas de un punto singular: $x = C$, $y = 0$. Por tanto, cada curva de la familia dada tiene un punto singular en el eje Ox . Si el parámetro C varía continuamente, los puntos singulares llenan todo el eje Ox .

Ejemplo 6. Hallar la envolvente y el lugar geométrico de los puntos singulares de la familia:

$$(y-C)^2 - \frac{2}{3}(x-C)^3 = 0. \quad (10)$$

Solución. Derivando respecto a C ambos miembros de la ecuación (10), encontramos:

$$-2(y-C) + \frac{2}{3}3(x-C)^2 = 0$$

6

$$y-C-(x-C)^2=0. \quad (11)$$

Eliminemos ahora el parámetro C de las ecuaciones (10) y (11). Poniendo la expresión

$$y-C=(x-C)^2$$

en la ecuación (10), obtenemos:

$$(x-C)^4 - \frac{2}{3}(x-C)^3 = 0,$$

6

$$(x-C)^3 \left[(x-C) - \frac{2}{3} \right] = 0,$$

de donde obtenemos dos valores posibles de C a los que corresponden dos soluciones del problema.

Primera solución:

$$C=x;$$

por eso, de la ecuación (11) encontramos:

$$y-x-(x-x)^2=0$$

6

$$y=x$$

Segunda solución:

$$C=x-\frac{2}{3};$$

por eso, de la ecuación (11) encontramos:

$$y-x+\frac{2}{3}-\left[x-x+\frac{2}{3}\right]^2=0.$$

6

$$y=x-\frac{2}{9}.$$

Hemos obtenido dos rectas: $y=x$ e $y=x-\frac{2}{9}$. La primera de ellas es el lugar geométrico de los puntos singulares, la segunda es envolvente (fig. 256).

Observación 2. Hemos demostrado en el § 7, cap. VI, que las normales a una curva son las tangentes a la evoluta de esta curva. Por consiguiente, la familia de las normales a una curva dada es al mismo tiempo la familia de las tangentes a su evoluta. Así, la evoluta de una curva es la envolvente de la familia de las normales a esta curva (fig. 257).

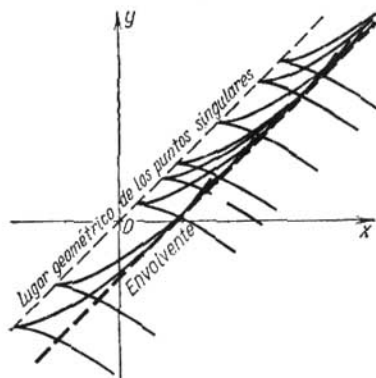


Fig. 256

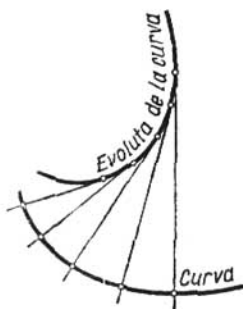


Fig. 257

La observación dada permite utilizar un método más para hallar la evoluta: para obtener la ecuación de la evoluta: es preciso hallar al principio la familia de todas las normales a la curva dada y después encontrar la envolvente de esta familia.

§ 12. SOLUCIONES SINGULARES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Supongamos que la ecuación diferencial

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (1)$$

tenga la integral general

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (2)$$

Supongamos también que la familia de las curvas integrales, correspondiente a la ecuación (2), tiene una envolvente. Demostremos que esta envolvente es también una curva integral de la ecuación diferencial (1).

En efecto, la envolvente toca en cada uno de sus puntos a cierta curva de la familia, es decir, la envolvente tiene en este punto una tangente común con la curva. Por consiguiente, en cada punto común la envolvente y la curva de la familia tienen valores iguales de las magnitudes x, y, y' .

Pero, para la curva de la familia las magnitudes x, y, y' satisfacen la ecuación (1). Por tanto, la abscisa, la ordenada y el coeficiente angular de cada punto de la envolvente satisfacen también la misma ecuación lo que significa que la envolvente es una curva

integral y que su ecuación es una solución de la ecuación diferencial dada. Pero, como la envolvente no es en general una curva de la familia, su ecuación no se puede deducir de la integral general (2), cualquiera que sea el valor particular de C . La solución de la ecuación diferencial que no se obtiene de la integral general cualquiera que sea el valor de C , y que tiene como gráfica la envolvente de la familia de curvas integrales que entran en la solución general, se llama *solución singular* de la ecuación diferencial.

Suponemos conocida la integral general

$$\Phi(x, y, C) = 0;$$

eliminando C de esta ecuación y de la ecuación $\Phi'_C(x, y, C) = 0$ obtenemos la ecuación $\psi(x, y) = 0$. Si esta función satisface la ecuación diferencial (y no pertenece a la familia (2)), entonces es la *integral singular*.

Notemos que por todo punto de la curva que represente la solución singular pasan por lo menos dos curvas integrales, es decir, la unicidad de la solución se perturba en cada punto de una solución singular.

Ejemplo. Hallar la solución singular de la ecuación

$$y^2(1 + y'^2) = R^2. \quad (*)$$

Solución. Hallemos su integral general. Resolvamos la ecuación respecto a y' :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Separando las variables, obtenemos:

$$\frac{y \, dy}{\pm \sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

De aquí, integrando, encontramos la integral general:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

Es fácil ver que la familia de curvas integrales es la de circunferencias de radio R , con centros en el eje de las abscisas. La envolvente de esta familia de curvas está dada por las dos rectas $y = \pm R$.

Las funciones $y = \pm R$ satisfacen la ecuación diferencial (*), de donde se deduce que es la integral singular.

§ 13. ECUACION DE CLAIRAUT

Examinemos la ecuación

$$y = x \frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right). \quad (1)$$

llamada de Clairaut.

Esta se integra introduciendo un parámetro auxiliar. Hagamos $\frac{dy}{dx} = p$, entonces la ecuación (1) toma la forma:

$$y = xp + \psi(p). \quad (1')$$

Derivemos todos los términos de la última ecuación respecto a x , teniendo en cuenta que $p = \frac{dy}{dx}$ es una función de x :

$$p = x \frac{dp}{dx} + p + \psi'(p) \frac{dp}{dx}$$

6

$$[x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

Igualando a cero cada factor, obtenemos:

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad (2)$$

y

$$x + \psi'(p) = 0. \quad (3)$$

1) La integración de la igualdad (2) da $p = C$ ($C = \text{const.}$). Poniendo este valor de p en la ecuación (1') encontramos su integral general:

$$y = xC + \psi(C), \quad (4)$$

que, desde el punto de vista geométrico, representa una **familia de rectas**.

2) De la ecuación (3) encontremos p como función de x , y pongámoslo en la ecuación (1'), entonces obtenemos la función:

$$y = xp(x) + \psi[p(x)], \quad (1'')$$

la cual es una solución de la ecuación (1), lo que es muy fácil demostrar.

En efecto, en virtud de la igualdad (3) tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = p.$$

Por eso, introduciendo la función (1'') en la ecuación (1), obtenemos la identidad:

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p).$$

La solución (1'') no se puede obtener a partir de la integral general (4), cualquiera que sea el valor de C . Es una **solución singular** y se obtiene eliminando el parámetro p de las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} y &= xp + \psi(p), \\ x &= \psi'(p) = 0, \end{aligned} \right\}$$

o, lo que es igual, eliminando C de las ecuaciones

$$y = xC + \psi(C),$$

$$x + \psi'_C(C) = 0.$$

Por consiguiente, la solución singular de la ecuación de Clairaut determina una envolvente de la familia de rectas, dadas por la integral general (4).

Ejemplo: Hallar las integrales general y singular de la ecuación

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{a \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Solución. Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ por C obtenemos la integral general:

$$y = xC + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}.$$

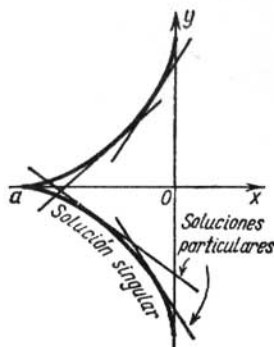


Fig. 258

Para obtener la solución singular derivamos la última ecuación respecto a C :

$$x + \frac{a}{(1+C^2)^{3/2}} = 0.$$

La solución singular (ecuación de la envolvente) se obtiene en la forma paramétrica (donde C es el parámetro):

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{(1+C^2)^{3/2}}, \\ y = \frac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Eliminando el parámetro C podemos obtener la dependencia directa entre x e y . Elevando ambos miembros de cada ecuación a la potencia $\frac{2}{3}$, y sumando miembro a miembro las ecuaciones obtenidas, hallamos la solución singular en la forma siguiente:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Es una astroide. Sin embargo, como envolvente de la familia de rectas (y, por tanto, como solución singular) se presenta no toda la astroide, sino sólo su mitad izquierda (puesto que de las ecuaciones paramétricas de la envolvente se deduce que $x \leq 0$) (fig. 258).

§ 14. ECUACION DE LAGRANGE

La ecuación de la forma

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \quad (1)$$

donde φ y ψ son funciones conocidas de $\frac{dy}{dx}$, se llama *ecuación de Lagrange*. Esta ecuación es lineal respecto a y y x . La ecuación de Clairaut, examinada en el párrafo anterior, es un caso particular de la ecuación de Lagrange, cuando $\varphi(y') \equiv y'$. Lo mismo que en el caso de la ecuación de Clairaut, la ecuación de Lagrange se integra introduciendo un parámetro auxiliar p .

Hagamos:

$$y' = p;$$

entonces, la ecuación original toma la forma:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \quad (1')$$

Derivando respecto a x , obtenemos:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx},$$

6

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}. \quad (1'')$$

De esta ecuación se puede deducir inmediatamente ciertas soluciones, a saber: la ecuación se transforma en una identidad para todo valor constante $p = p_0$, que satisfaga la condición:

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0.$$

En efecto, siendo p constante, la derivada $\frac{dp}{dx} \equiv 0$ y ambos miembros de la ecuación (1'') se anulan. La solución que corresponde a cada valor de $p = p_0$, es decir, $\frac{dy}{dx} = p_0$, es una función lineal de x (puesto que la derivada $\frac{dy}{dx}$ es constante sólo para las funciones lineales). Para hallar esta función es suficiente sustituir en la ecuación (1') el valor $p = p_0$:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Si esta solución no se deduce de la solución general, cualquiera que sea el valor de la constante arbitraria, será, por tanto, una **solución singular**.

Encontremos, ahora, la **solución general**. Para esto escribamos la ecuación (1'') en la forma:

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

considerando x como función de p . La ecuación obtenida es entonces una ecuación diferencial lineal respecto a la función x de p .

Resolviéndola, encontramos:

$$x = \omega(p, C). \quad (2)$$

Eliminando el parámetro p de las ecuaciones (1') y (2), obtenemos la **integral general** de la ecuación (1) en la siguiente forma:

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Ejemplo. Sea la ecuación

$$y = xy'^2 + y'^2. \quad (I)$$

Haciendo $y' = p$, tenemos:

$$y = xp^2 + p^2. \quad (I')$$

Derivando respecto a x , obtenemos:

$$p = p^2 + [2xp + 2p] \frac{dp}{dx}. \quad (I'')$$

Halleemos las **soluciones singulares**. Puesto que $p = p^2$, cuando $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$, en calidad de soluciones se presentan las funciones lineales [véase (I')]:

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2, \text{ es decir, } y = 0,$$

e

$$y = x + 1.$$

Después de encontrar la integral general, veamos, si estas funciones son las soluciones particulares o singulares. Para hallar la integral general escribamos la ecuación (I'') en la forma:

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{2p}{p - p^2} = \frac{2}{1 - p}$$

considerando x como función de la variable independiente p . Integrando la ecuación lineal (respecto a x) hallamos.

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2}. \quad (II)$$

Eliminando p de las ecuaciones (I') y (II), obtenemos la **integral general**:

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2.$$

La **integral singular** de la ecuación original será:

$$y = 0,$$

puesto que esta solución no se deduce de la solución general cualquiera que sea el valor de C .

Sin embargo, la función $y = x + 1$ no es una solución singular, sino particular, y se deduce de la solución general, poniendo $C = 0$.

§ 15. TRAYECTORIAS ORTOGONALES E ISOGONALES

Sea una familia de curvas monoparamétrica

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (1)$$

Las líneas que cortan todas las curvas de la familia dada (1) bajo un ángulo constante se llaman *trayectorias isogonales*. Si este ángulo es recto, las trayectorias se llaman *ortogonales*.

Trayectorias ortogonales. Hallemos la ecuación de las trayectorias ortogonales. Escribamos la ecuación diferencial de la familia dada de curvas, eliminando C de las ecuaciones:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

y

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\text{Sea } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (1')$$

una ecuación diferencial.

Aquí, $\frac{dy}{dx}$ es un coeficiente angular de la tangente a una curva de la familia en el punto $M(x, y)$. Puesto que la trayectoria ortogonal, que pasa por el punto $M(x, y)$, es perpendicular a la curva correspondiente de la familia, entonces el coeficiente angular $\frac{dy_T}{dx}$

de la tangente a esta curva está ligado con $\frac{dy}{dx}$ por la correlación (fig. 259)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_T}{dx}}. \quad (2)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (1') y omitiendo el índice T , obtenemos una relación entre las coordenadas de un punto arbitrario (x, y) y el coeficiente angular de la trayectoria ortogonal en este punto, es decir, la **ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales**:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0. \quad (3)$$

La integral general de esta ecuación

$$\Phi_1(x, y, C) = 0$$

da la familia de trayectorias ortogonales.

Las trayectorias ortogonales se encuentran, por ejemplo, cuando estudiamos una corriente plana de un líquido.

Supongamos que la corriente de un líquido en un plano sea tal que en cada punto del plano Oxy esté determinado el vector $v(x, y)$ de la velocidad del movimiento. Si este vector depende

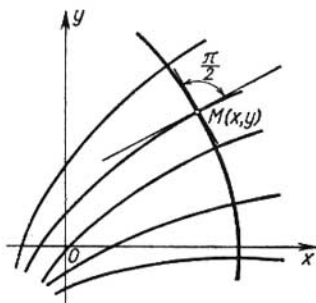


Fig. 259

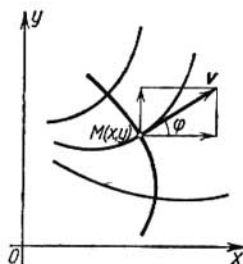


Fig. 260

sólo de la posición del punto en el plano y no depende del tiempo, entonces este movimiento se llama estacionario, o establecido. Examinemos, precisamente, un movimiento semejante. Admitamos, además, que existe un potencial de velocidades, es decir, una función $u(x, y)$ tal que las proyecciones del vector $v(x, y)$ sobre los ejes de coordenadas $v_x(x, y)$ y $v_y(x, y)$, sean sus derivadas parciales respecto a x e y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y. \quad (4)$$

Las curvas de la familia

$$u(x, y) = C \quad (5)$$

se llaman *equipotenciales* (es decir, líneas de igual potencial).

Las curvas cuyas tangentes en cada punto coinciden en dirección con el vector $v(x, y)$, se llaman *líneas de corriente* y representan las trayectorias de los puntos móviles.

Demostremos que las líneas de corriente son trayectorias ortogonales de la familia de líneas equipotenciales (fig. 260).

Sea φ el ángulo formado por el vector de velocidad v con el eje Ox . En virtud de la correlación (4) tenemos:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |v| \cos \varphi; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |v| \sin \varphi;$$

de aquí hallamos el coeficiente angular de la tangente a la línea de corriente

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \quad (6)$$

Derivando la relación (5) respecto a x , obtenemos el coeficiente angular de la tangente a la línea equipotencial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}. \quad (7)$$

Por consiguiente, el coeficiente angular de la tangente a la línea equipotencial es inverso, en magnitud y signo, al coeficiente angular de la tangente a la línea de corriente, de donde se deduce que las líneas equipotenciales y las de corriente son mutuamente ortogonales.

Si se trata de un campo eléctrico o magnético, las trayectorias ortogonales de la familia de líneas equipotenciales son las líneas de fuerza del campo correspondiente.

Ejemplo 1. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas

$$y = Cx^2.$$

Solución. Escribamos la ecuación diferencial de la familia:

$$y' = 2Cx.$$

Eliminando C , obtenemos:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Sustituyendo y' por $-\frac{1}{y'}$, obtenemos la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales:

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x}$$

o sea

$$y \, dy = -\frac{x \, dx}{2}.$$

Su integral general es:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2.$$

Por consiguiente, las trayectorias ortogonales de la familia dada de parábolas forma una familia de elipses con semiejes $a = 2C$, y $b = C\sqrt{2}$ (fig. 261).

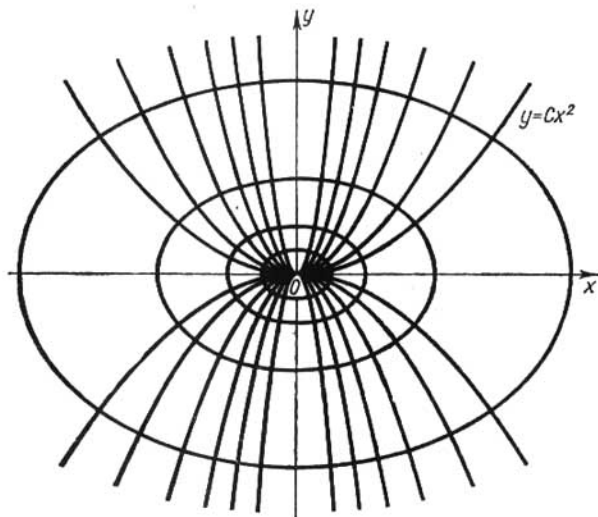


Fig. 261

Trayectorias isogonales. Supongamos que las trayectorias corten las curvas de una familia dada bajo el ángulo α , siendo $\operatorname{tg} \alpha = k$.

El coeficiente angular $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ (fig. 262) de la tangente a la curva de la familia, y el coeficiente angular $\frac{dy_T}{dx} = \operatorname{tg} \psi$ de la tangente a la trayectoria isogonal están ligados mediante la correlación:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \psi},$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k \frac{dy_T}{dx} + 1}. \quad (2)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (1') y quitando el índice T , obtenemos la ecuación diferencial de las trayectorias isogonales.

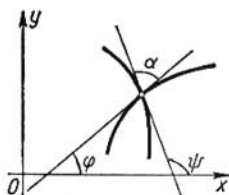


Fig. 262

Ejemplo 2. Hallar las trayectorias isogonales de la familia de rectas:

$$y = Cx, \quad (8)$$

que cortan las líneas de la familia dada bajo el ángulo α , siendo $\operatorname{tg} \alpha = k$.

Solución. Escribamos la ecuación diferencial de la familia de rectas.

Derivando la ecuación (8) respecto a x , hallemos:

$$\frac{dy}{dx} = C.$$

Por otra parte, de la misma ecuación se deduce:

$$C = \frac{y}{x}.$$

Por consiguiente, la ecuación diferencial de la familia dada tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Utilizando la relación (2') obtenemos la ecuación diferencial de las trayectorias isogonales:

$$\frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k \frac{dy_T}{dx} + 1} = \frac{y}{x}.$$

De donde, quitando el índice T , encontramos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k \frac{y}{x}}.$$

Integrando esta ecuación homogénea obtenemos la integral general:

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln C, \quad (9)$$

que determina la familia de las trayectorias isogonales. Para aclarar cuáles son las curvas de esta familia, pasemos a coordenadas polares:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho.$$

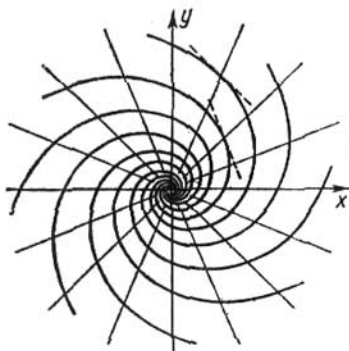


Fig. 263

Introduciendo estas expresiones en la igualdad (9), obtenemos:

$$\ln \rho = \frac{1}{k} \varphi + \ln C$$

6

$$\rho = C e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Por consiguiente, la familia de las trayectorias isogonales está compuesta por espirales logarítmicas (fig. 263).

§ 16. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDENES SUPERIORES (GENERALIDADES)

Como hemos indicado más arriba (véase § 2), se puede escribir simbólicamente una ecuación diferencial de n -ésimo orden en la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

o, si se puede resolverla respecto a la n -ésima derivada,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1')$$

En el capítulo presente estudiamos sólo las ecuaciones de órdenes superiores, que se resuelven respecto a la derivada del orden más alto. Para estas ecuaciones tiene lugar el teorema de existencia y unicidad de la solución, análogo al teorema correspondiente sobre la solución de las ecuaciones de primer orden.

Teorema. Si en la ecuación

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

la función $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ y sus derivadas parciales respecto a los argumentos $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ son continuas en un cierto dominio que contiene los valores $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, existe solamente la solución única $y = y(x)$ de la ecuación que satisface las condiciones:

$$\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Estas condiciones se llaman *iniciales*. En la presente obra no se demuestra este teorema.

Si analizamos una ecuación de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$, las condiciones iniciales de la solución para $x = x_0$ serán:

$$y = y_0, \quad y' = y'_0,$$

donde x_0, y_0, y'_0 son números dados. El significado geométrico de estas condiciones es el siguiente: por el punto dado de un plano (x_0, y_0) pasa una sola curva cuya tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente es y'_0 . De aquí se deduce, además, que si damos diferentes valores a y'_0 , conservando constantes x_0 e y_0 , obtenemos una infinidad de curvas integrales con diferentes ángulos de inclinación que pasan por el punto dado.

Introduzcamos, ahora, la noción de solución general de una ecuación de n -ésimo orden.

Definición. Se llama *solución general* de una ecuación diferencial de n -ésimo orden una función

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

que depende de n constantes arbitrarias $C_1, C_2, \dots, C_n$ de tal modo que:

a) satisfaga la ecuación cualesquiera que sean los valores de las constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$;

b) para las condiciones iniciales dadas:

$$y_{x=x_0} = y_0,$$

$$y'_{x=x_0} = y'_0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-1)}_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0$$

se puede elegir las constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ así que la función $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ satisfaga estas condiciones (suponiendo que los valores iniciales $x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$ pertenezcan al dominio de existencia de la solución).

Una correlación de la forma $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, que define la solución general de manera implícita se llama *integral general* de la ecuación diferencial.

Toda función que se obtiene de la solución general para valores concretos de las constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$, se llama *solución particular*. La gráfica de una solución particular se llama *curva integral* de la ecuación diferencial dada.

Resolver (integrar) una ecuación diferencial de n -ésimo orden significa:

1) hallar su solución general (si no se han dado las condiciones iniciales), o:

2) hallar tal solución particular de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales dadas (si éstas existen).

En los párrafos siguientes veremos los métodos de resolver distintas ecuaciones de n -ésimo orden.

§ 17. ECUACION DE LA FORMA $y^{(n)} = f(x)$

La ecuación de la forma

$$y^{(n)} = f(x), \quad (1)$$

es la más simple de n -ésimo orden.

Halleemos su integral general.

Integrando ambos miembros de la ecuación respecto a x , y tomando en consideración que $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, obtenemos:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1,$$

donde x_0 es un valor arbitrario de x , y C_1 es una constante de integración.

Integrando una vez más tenemos:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^x f(x) dx \right) dx + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Procediendo de esta manera, obtendremos por fin, después de n integraciones, la expresión de la integral general:

$$y = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx + \frac{C_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \\ + C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots C_n.$$

Para hallar la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales:

$y_{x=x_0} = y_0$; $y'_{x=x_0} = y'_0$; ...; $y^{(n-1)}_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0$,
es suficiente hacer:

$$C_n = y_0, C_{n-1} = y'_0, \dots, C_1 = y^{(n-1)}_0.$$

Ejemplo 1. Hallar la integral general de la ecuación

$$y'' = \operatorname{sen}(kx)$$

y la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales:

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 1.$$

Solución:

$$y' = \int_0^x \operatorname{sen} kx dx + C_1 = -\frac{\cos kx - 1}{k} + C_1,$$

$$y = -\int_0^x \left(\frac{\cos kx - 1}{k} \right) dx + \int_0^x C_1 dx + C_2$$

6

$$y = -\frac{\operatorname{sen} kx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2.$$

Esta es la integral general. Para hallar la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales dadas es suficiente determinar los valores correspondientes de C_1 y C_2 .

De la condición $y_{x=0} = 0$ hallamos $C_2 = 0$.

De la condición $y'_{x=0} = 1$ hallamos $C_1 = 1$.

Así, la solución particular buscada tiene la forma:

$$y = -\frac{\operatorname{sen} kx}{k^2} + x \left(\frac{1}{k} + 1 \right).$$

Ecuaciones diferenciales de este género se encuentran en la teoría de la flexión de vigas.

Ejemplo 2. Examinemos una viga prismática elástica sometida a la flexión por acción de fuerzas externas, tanto repartidas continuamente (peso, carga) como, concentradas. Dirijamos el eje Ox horizontalmente, a lo largo del eje de la viga todavía no deformada y el eje Oy verticalmente hacia abajo (fig. 264).

Toda fuerza aplicada a la viga (por ejemplo, la carga, reacción de los apoyos) tiene un momento respecto a cualquier sección transversal de la viga; este momento es igual al producto de la fuerza, por la distancia entre la sección dada y el punto de aplicación de la fuerza. La suma $M(x)$ de los momentos de todas las fuerzas aplicadas por un mismo lado de la sección de

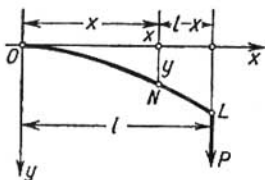


Fig. 264

abscisa x , se llama momento de flexión de la viga respecto a la sección dada. En el curso de «Resistencia de materiales» se demuestra que el momento de flexión de una viga es igual a: $\frac{EJ}{R}$, donde, E es el módulo de elasticidad, que depende de material; J es el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga respecto al eje horizontal que pasa por el centro de gravedad de esta sección; R es el radio de curvatura del eje de la viga encorvada, que se expresa mediante la fórmula (§ 6, cap. VI):

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Así, la ecuación diferencial del eje de la viga encorvada tiene la forma:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (2)$$

Si admitimos que las deformaciones son pequeñas y los ángulos entre las tangentes al eje de la viga encorvada y el eje Ox son bastante pequeños, podemos despreciar la magnitud y'^2 que es el cuadrado de y' , y considerar:

$$R = \frac{1}{y''}.$$

La ecuación diferencial de la viga encorvada tomará entonces la forma:

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}, \quad (2')$$

que es una ecuación de la forma (1).

Ejemplo 3. Una viga está encastrada por su extremo O y sometida a la acción de una fuerza vertical concentrada P , aplicada al extremo libre L , a una distancia l del punto de fijación (fig. 264). Despreciemos el peso de la viga.

Examinemos la sección en el punto $N(x)$. El momento de flexión respecto a la sección N será

$$M(x) = (l-x)P.$$

La ecuación diferencial (2') tomará la forma:

$$y'' = \frac{P}{EJ} (l-x).$$

Las condiciones iniciales son: cuando $x=0$, la flexión y es igual a cero y la tangente al eje de la viga encorvada coincide con el eje Ox , es decir:

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 0.$$

Integrando la ecuación encontramos:

$$y' = \frac{P}{EJ} \int_0^x (l-x) dx = \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right);$$

$$y = \frac{P}{2EJ} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right). \quad (3)$$

De la fórmula (3) se determina, en particular, la flexión h en el extremo L de la viga:

$$h = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

§ 18. ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

1. La ecuación de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1)$$

no contiene explícitamente la función desconocida y .

Solución. Designemos por p la derivada $\frac{dy}{dx}$, es decir, hagamos: $\frac{dy}{dx} = p$.

Entonces,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Introduciendo estas expresiones de las derivadas en la ecuación (1) obtenemos una ecuación de primer orden

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

donde p es la función desconocida de x . Al integrar esta ecuación, encontramos su solución general:

$$p = p(x, C_1),$$

y, luego, de la correlación $\frac{dy}{dx} = p$ obtenemos la integral general de la ecuación (1):

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2.$$

Ejemplo 1. Examinemos la ecuación diferencial de una catenaria (véase § 1).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Hagamos:

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

Entonces,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

y obtenemos una ecuación diferencial de primer orden respecto a la función auxiliar p de x :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2}.$$

Separando las variables, tenemos:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a},$$

de donde:

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1,$$

$$p = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right).$$

Pero, como $p = \frac{dy}{dx}$ esta última correlación es una ecuación diferencial respecto a la función desconocida y . Integrándola, obtenemos la ecuación de la catenaria (véase § 1):

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right) + C_2.$$

Encontremos la solución particular que satisface las siguientes condiciones iniciales:

$$y_{x=0} = a,$$

$$y'_{x=0} = 0.$$

La primera condición da $C_2=0$; la segunda, $C_1=0$.
En definitiva tenemos:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Observación. De modo análogo se puede integrar la ecuación

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}).$$

Poniendo $y^{(n-1)} = p$, obtenemos una ecuación de primer orden para determinar p :

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Determinando p en función de x , se deduce y de la correlación $y^{(n-1)} = p$ (véase § 17).

II. La ecuación de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (2)$$

no contiene explícitamente la variable independiente x . Para resolverla hagamos de nuevo:

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad (3)$$

pero, ahora consideremos p como función de y (y no de x , como antes). Entonces:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p.$$

Poniendo en la ecuación (2) las expresiones $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, obtenemos una ecuación de primer orden respecto a la función auxiliar p :

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p). \quad (4)$$

Integrándola, hallamos p en función de y y de una constante arbitraria C_1 :

$$p = p(y, C_1).$$

Introduciendo este valor en la correlación (3), obtenemos una ecuación diferencial de primer orden para la función y de x :

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Separando variables, tenemos:

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Integrando esta ecuación, obtenemos la integral general de la ecuación original:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

Ejemplo 2. Hallar la integral general de la ecuación

$$3y'' = y^{-\frac{5}{3}}.$$

Solución. Hagamos $p = \frac{dy}{dx}$ considerando p como función de y . Entonces, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ y, por tanto, obtenemos una ecuación de primer orden para la función auxiliar p :

$$3p \frac{dp}{dy} = y^{-\frac{5}{3}}.$$

Integrando esta ecuación, hallamos:

$$p^2 = C_1 - y^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ó} \quad p = \pm \sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}.$$

Pero $p = \frac{dy}{dx}$; por consiguiente, para determinar y obtenemos la ecuación:

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-\frac{2}{3}}}} = dx \quad \text{ó} \quad \frac{\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} dy}{\pm \sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}} = dx,$$

de donde:

$$x + C_2 = \pm \int \frac{\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}}.$$

Para calcular la última integral hagamos la sustitución:

$$C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1 = t^2.$$

Entonces:

$$y^{1/3} = (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{C_1^{1/2}};$$

$$dy = 3t (t^2 + 1)^{1/2} \frac{1}{C_1^{3/2}} dt.$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = \frac{1}{C_1^2} \int \frac{3t(t^2+1)}{t} dt = \frac{3}{C_1^2} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) = \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1} (C_1 y^{2/3} + 2).$$

En la forma definitiva tenemos:

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1} (C_1 y^{2/3} + 2).$$

Ejemplo 3. Supongamos que un punto se mueve a lo largo del eje Ox bajo la acción de una fuerza dependiente sólo de la posición del punto. La ecuación diferencial del movimiento será:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x).$$

Sea $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$ para $t = 0$.

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por $\frac{dx}{dt}$ e integrando entre los límites de 0 a t , obtenemos:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx.$$

ó

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left[- \int_{x_0}^x F(x) dx \right] = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{const.}$$

El primer término de la última ecuación representa la energía cinética y el segundo, la energía potencial del punto móvil. De la ecuación obtenida se deduce que la suma de las energías cinética y potencial permanece constante durante todo el tiempo de movimiento.

Problema de péndulo matemático. Supongamos que un punto material de masa m se mueve bajo la acción de la fuerza de gravedad por una circunferencia L que se halla en un plano vertical. Hallemos la ecuación del movimiento del punto despreciando las fuerzas de resistencia (frotamiento, resistencia del aire, etc.).

Ubiquemos el origen de coordenadas en el punto inferior de la circunferencia, dirigiendo el eje Ox a lo largo de la tangente a esta circunferencia (fig. 265).

Designemos por l el radio de la circunferencia y por s , la longitud del arco a partir del origen O hasta el punto variable M donde se halla la masa m ; al mismo tiempo tomemos la longitud mencionada con el signo correspondiente ($s > 0$, si M se encuentra a la derecha del origen O ; $s < 0$, si M se encuentra a la izquierda del O).

El problema en consideración consiste en establecer la dependencia entre s y el tiempo t .

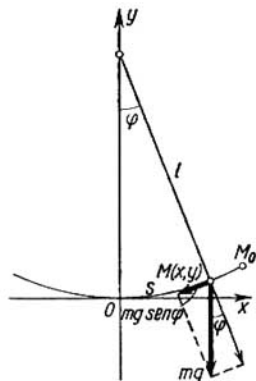


Fig. 265

Descompongamos la fuerza de gravedad mg en dos componentes: tangencial y normal. La primera, que es igual a $-mg \sin \varphi$, causa el movimiento, la segunda se elimina por la reacción de la curva descrita durante el movimiento de la masa m .

Así, la ecuación de movimiento tiene la forma:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \varphi.$$

Puesto que para la circunferencia el ángulo $\varphi = \frac{s}{l}$; obtenemos la ecuación:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}.$$

Es una ecuación diferencial del tipo II (por no contener explícitamente la variable independiente t).

Integrándola de la manera correspondiente tenemos:

$$\frac{ds}{dt} = p, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dp}{ds} p.$$

Por consiguiente,

$$p \frac{dp}{ds} = -g \sin \frac{s}{l},$$

o bien,

$$p dp = -g \sin \frac{s}{l} ds,$$

de donde:

$$p^2 = 2gl \cos \frac{s}{l} + C_1.$$

Designemos mediante s_0 la longitud máxima del arco descrito por el punto M . Cuando $s = s_0$, la velocidad del punto es igual a cero:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{s=s_0} = p|_{s=s_0} = 0.$$

Esto permite determinar C_1 :

$$0 = 2gl \cos \frac{s_0}{l} + C_1,$$

de donde

$$C_1 = -2gl \cos \frac{s_0}{l}.$$

Por tanto,

$$p^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2gl \left(\cos \frac{s}{l} - \cos \frac{s_0}{l} \right),$$

o, aplicando a la última expresión la fórmula que determina la diferencia de cosenos:

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 4gl \sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}, \quad (5)$$

o bien *):

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl} \sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}. \quad (6)$$

Esta es una ecuación con variables separables. Separándolas, obtenemos:

$$\frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl} dt. \quad (7)$$

Supongamos por ahora que $s \neq s_0$, entonces el denominador de la fracción es distinto de cero. Si suponemos que $s=0$ para $t=0$, de la igualdad (7) obtenemos:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl} t. \quad (8)$$

Esta igualdad expresa la dependencia entre s y t . La integral del miembro izquierdo no se expresa mediante las funciones elementales; lo mismo ocurre con s como función de t .

Examinemos del modo aproximado el problema planteado. Supongamos que los ángulos $\frac{s_0}{l}$ y $\frac{s}{l}$ son pequeños. Los ángulos $\frac{s+s_0}{2l}$ y $\frac{s_0-s}{2l}$ no son superiores a $\frac{s_0}{l}$. Sustituyamos en la ecuación (6) los senos de ángulos por los ángulos:

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl} \sqrt{\frac{s+s_0}{2l} \frac{s_0-s}{2l}},$$

o bien,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{s_0^2 - s^2}. \quad (6')$$

Separando las variables, obtenemos (suponiendo provisionalmente que $s \neq s_0$):

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt. \quad (7')$$

Supongamos otra vez que $s=0$ para $t=0$. Integrando la última ecuación, obtenemos:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (8')$$

6

$$\operatorname{arcsen} \frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

*) Tomamos el signo más delante de la raíz. De la observación que se da al final del problema se deduce que no hay necesidad de examinar el caso cuando se toma el signo menos.

de donde:

$$s = s_0 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (9)$$

Observación. Al resolver el problema, hemos supuesto que $s \neq s_0$. Sin embargo, por medio de la sustitución directa nos convencemos de que la función (9) es solución de la ecuación (6') para cualquier valor de t .

Recordemos que la solución (9) es aproximada para la ecuación (5), puesto que habíamos sustituido la ecuación (6) por la ecuación aproximada (6').

La ecuación (9) muestra que el punto M , (que se puede considerar como el extremo del péndulo), efectúa oscilaciones armónicas de período $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Este período no depende de la amplitud de la oscilación s_0 .

Ejemplo 4. Problema de la segunda velocidad cósmica (velocidad de escape).

Determinar la mínima velocidad con la cual se debe lanzar un cuerpo verticalmente hacia arriba para que éste no regrese a la tierra. La resistencia del aire se desprecia.

Solución. Designemos las masas de la Tierra y del cuerpo lanzado por M y m , respectivamente. En virtud de la ley newtoniana de atracción, la fuerza f que actúa en el cuerpo m , es:

$$f = k \frac{M \cdot m}{r^2},$$

donde, r es la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de gravedad del cuerpo lanzado;

k es la constante de gravitación universal.

La ecuación diferencial de movimiento de este cuerpo de masa m es:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M \cdot m}{r^2}$$

6

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M}{r^2}. \quad (10)$$

Hemos tomado el signo menos puesto que la aceleración en el caso dado es negativa. La ecuación diferencial (10) es una ecuación de la forma (2). Resolvamos esta ecuación tomando las siguientes condiciones iniciales:

$$\text{cuando } t=0, r=R \text{ y } \frac{dr}{dt} = v_0.$$

Aquí, R es el radio de la Tierra, v_0 es la velocidad de lanzamiento. Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr},$$

donde v es la velocidad del movimiento. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (10), tenemos:

$$v \frac{dv}{dr} = -k \frac{M}{r^2}.$$

Separando las variables, resulta:

$$v dv = -kM \frac{dr}{r^2}.$$

Integrando esta ecuación, encontramos:

$$\frac{v^2}{2} = +kM \frac{1}{r} + C_1. \quad (11)$$

Determinemos C_1 de la condición $v = v_0$, en la superficie de la Tierra ($r = R$):

$$\frac{v_0^2}{2} = +kM \frac{1}{R} + C_1$$

6

$$C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}.$$

Sustituyendo el valor de C_1 en la igualdad (11):

$$\frac{v^2}{2} = +kM \frac{1}{r} - \frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

6

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \right). \quad (12)$$

Según la hipótesis, la velocidad del cuerpo debe ser constantemente positiva, por tanto: $\frac{v^2}{2} > 0$. Como la magnitud $\frac{kM}{r}$ se hace muy pequeña cuando r crece indefinidamente, la condición $\frac{v^2}{2} > 0$ se cumple para todo r sólo en el caso de que:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0 \quad (13)$$

6

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Por tanto, la velocidad mínima se define por la igualdad

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}}, \quad (14)$$

donde

$$k = 6,66 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{grseg}^2},$$

$$R = 63 \cdot 10^7 \text{ cm.}$$

En la superficie de la Tierra, cuando $r = R$, la aceleración de la fuerza de gravedad es igual a g ($g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$). En virtud de lo último, obtenemos de la igualdad (10):

$$g = k \frac{M}{R^2}$$

6

$$M = \frac{gR^2}{k}.$$

Poniendo este valor de M en la fórmula (14), tenemos:

$$v_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11,2 \cdot 10^6 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{seg}}.$$

§ 19. METODO GRAFICO DE LA INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Aclaremos cuál es la interpretación geométrica de una ecuación diferencial de segundo orden. Sea la ecuación

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (1)$$

designemos por φ el ángulo formado por la tangente a la curva con la dirección positiva del eje Ox ; entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (2)$$

Para aclarar el significado geométrico de la segunda derivada recordemos la fórmula que determina el radio de curvatura de una curva en un punto dado*):

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

De donde tenemos:

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{R}.$$

Pero,

$$\begin{aligned} y' = \operatorname{tg} \varphi; \quad 1 + y'^2 &= 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \sec^2 \varphi; \quad (1 + y'^2)^{3/2} = \\ &= |\sec^3 \varphi| = \frac{1}{|\cos^3 \varphi|}. \end{aligned}$$

Por eso:

$$y'' = \frac{1}{R |\cos^3 \varphi|}. \quad (3)$$

*) Hasta ahora siempre hemos considerado que el radio de curvatura es un número positivo. Pero, en este párrafo supongamos que el radio de curvatura pueda tomar valores tanto positivos como negativos: si la curva es *convexa* ($y'' < 0$), consideremos el radio de curvatura negativo ($R < 0$); si la curva es *cóncava* ($y'' > 0$), considerémoslo como positivo ($R > 0$).

Introduciendo, ahora, las expresiones obtenidas para y e y'' en la ecuación (1), obtenemos:

$$\frac{1}{R |\cos^3 \varphi|} = f(x, y, \operatorname{tg} \varphi),$$

6

$$R = \frac{1}{|\cos^3 \varphi| \cdot f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)}. \quad (4)$$

Esto demuestra que la ecuación diferencial de segundo orden determina la magnitud del radio de curvatura de la curva integral,

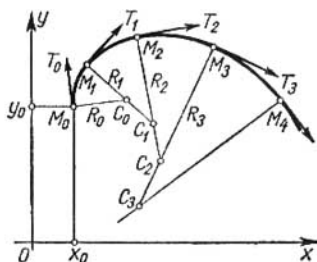


Fig. 266

si están dadas las coordenadas del punto y la dirección de la tangente en este punto.

De lo anterior se deduce el método de la construcción aproximada de una curva integral con ayuda de una curva lisa*); la curva está constituida por arcos de circunferencias.

Supongamos, por ejemplo, que es preciso hallar una solución de la ecuación (1), que satisfaga las siguientes condiciones iniciales:

$$y_{x=x_0} = y_0; \quad y'_{x=x_0} = y'_0.$$

Tracemos por el punto $M_0(x_0, y_0)$ un rayo M_0T_0 , cuyo coeficiente angular es $y' = \operatorname{tg} \varphi_0 = y'_0$ (fig. 266). De la ecuación (4) encontramos la magnitud $R = R_0$. Pongamos un segmento M_0C_0 igual a R_0 en la perpendicular a la dirección M_0T_0 y tracemos (tomando el punto C_0 por centro) un arco pequeño $\widehat{M_0M_1}$ de radio R_0 . Notemos que es preciso orientar el segmento M_0C_0 en la direc-

*) Es una curva que tiene en todos los puntos la tangente, cuyo ángulo de inclinación es una función continua de la longitud s del arco.

ción conveniente para que el arco de la circunferencia sea convexo hacia arriba cuando $R_0 < 0$; y sea convexo abajo cuando $R_0 > 0$ (véase la nota en la página 67).

Sean x_1 e y_1 las coordenadas del punto M_1 en el arco construido y ubicado suficientemente próximo al punto M_0 , y sea $\operatorname{tg} \varphi_1$, el coeficiente angular de la tangente M_1T_1 a la circunferencia trazada en el punto M_1 . De la ecuación (4) hallamos el valor de $R = R_1$ correspondiente al punto M_1 . Tracemos el segmento M_1C_1 , igual a R_1 y perpendicular a M_1T_1 ; tomando el punto C_1 como centro, tracemos arco $\widehat{M_1M_2}$ de radio R_1 . Tomemos luego en este arco un punto $M_2(x_2, y_2)$, próximo a M_1 , y continuemos nuestra construcción hasta obtener un tramo suficientemente grande de la curva, formado por los arcos de circunferencias. De lo anteriormente dicho se deduce que esta curva es aproximadamente una línea integral que pasa por el punto M_0 . Es evidente que la curva construida tanto más se aproximará a la curva integral cuanto menores serán los arcos $\widehat{M_0M_1}$, $\widehat{M_1M_2}$, ...

§ 20. ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS. DEFINICIONES Y PROPIEDADES GENERALES

Definición 1. Una ecuación diferencial de n -ésimo orden se llama *lineal* si es de primer orden respecto a la función desconocida y y sus derivadas y' , ..., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, es decir, si esta ecuación tiene la forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (1)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y $f(x)$ son funciones dadas de x o constantes; además, $a_0 \neq 0$ para todos los valores de x , en el dominio de definición de la ecuación (1). En adelante supongamos que las funciones $a_0, a_1, \dots, a_n$ y $f(x)$ son continuas para todos los valores de x y que el coeficiente $a_0 = 1$ (si a_0 es distinto de la unidad, es suficiente dividir por él todos los términos de la ecuación). La función $f(x)$, se llama *segundo miembro de la ecuación*.

Si $f(x) \neq 0$, la ecuación se llama *lineal no homogénea*, o ecuación *con segundo miembro*. Si $f(x) \equiv 0$, la ecuación tiene la forma:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2)$$

y se llama *lineal homogénea*, o ecuación *sin segundo miembro* (el primer miembro de esta ecuación es una función homogénea de primer orden respecto a $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$).

Definamos algunas propiedades fundamentales de las ecuaciones lineales homogéneas, limitándonos a las demostraciones de las ecuaciones de segundo orden.

Teorema 1. Si y_1 e y_2 son dos soluciones particulares de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (3)$$

entonces, $y_1 + y_2$ es también la solución de esta ecuación.

Demostración. Si y_1 e y_2 son las soluciones de la ecuación, entonces:

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 &= 0 \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Poniendo en la ecuación (3) la suma $y_1 + y_2$ y tomando en consideración las identidades (4), tenemos:

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) &= \\ &= (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

es decir, $y_1 + y_2$ es solución de la ecuación.

Teorema 2. Si y_1 es una solución de la ecuación (3), y C es una constante, el producto Cy_1 es, también, una solución de esta ecuación (3).

Demostración. Introduciendo en la ecuación (3) la expresión Cy_1 , obtenemos:

$$(Cy_1)'' + a_1 (Cy_1)' + a_2 (Cy_1) = C(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

y el teorema queda demostrado.

Definición 2. Dos soluciones y_1 e y_2 de la ecuación (3) se llaman *linealmente independientes en el segmento* $[a, b]$, si su razón en éste último no es constante, es decir, cuando

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const.}$$

En caso contrario, las soluciones se llaman *linealmente dependientes*. En otras palabras, dos soluciones y_1 e y_2 se llaman *linealmente dependientes* en el segmento $[a, b]$, si existe un número constante λ tal que $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, cuando $a \leq x \leq b$. En este caso $y_1 = \lambda y_2$.

Ejemplo 1. Sea la ecuación $y'' - y = 0$, es fácil verificar que las funciones e^x , e^{-x} , $3e^x$, $5e^{-x}$ son soluciones de esta ecuación. Las funciones e^x y e^{-x} son linealmente independientes en todo segmento, puesto que la razón $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ no permanece constante cuando varía x . En cambio, las funciones e^x y $3e^x$ son linealmente dependientes, puesto que $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const.}$

Definición 3. Si y_1 e y_2 son las funciones de x , entonces el determinante

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

se llama *determinante de Wronski* o, simplemente, *Wronskiano* de las funciones dadas.

Teorema 3. Si las funciones y_1 e y_2 son linealmente dependientes en el segmento $[a, b]$, el Wronskiano en este segmento es idénticamente igual a cero.

En efecto, si $y_2 = \lambda y_1$, donde $\lambda = \text{const}$, entonces $y_2' = \lambda y_1'$, y

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema 4. Si el Wronskiano $W(y_1, y_2)$, de las soluciones y_1 e y_2 de la ecuación lineal homogénea (3) no se anula en un punto $x = x_0$ del segmento $[a, b]$, donde los coeficientes de la ecuación son continuos, entonces no se anula para cualquier valor de x en este segmento.

Demostración. Puesto que y_1 e y_2 son dos soluciones de la ecuación (3), tenemos:

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0, \quad y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0.$$

Multiplicando los términos de la primera igualdad, por y_1 y los términos de la segunda por y_2 y luego sumándolas, obtenemos:

$$(y_1 y_2'' - y_1' y_2') + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \quad (5)$$

La diferencia encerrada entre segundo paréntesis es el Wronskiano $W(y_1, y_2)$:

$$W(y_1 y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2).$$

La diferencia encerrada entre el primer paréntesis es la derivada del determinante de Wronski

$$W(y_1 y_2)' = (y_1 y_2'' - y_1' y_2') = y_1 y_2'' - y_1' y_2'.$$

Por consiguiente, la igualdad (5) asume la forma:

$$W' + a_1 W = 0 \quad (6)$$

Hallems la solución de la última ecuación que satisfaga la condición inicial:

$$W|_{x=x_0} = W_0.$$

Hallems al principio la solución general de la ecuación (6), suponiendo que $W \neq 0$.

Separando variables, en la ecuación (6), tenemos:

$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx.$$

Integrando, hallamos:

$$\ln W = - \int_{x_0}^x a_1 dx + \ln C$$

6

$$\ln \frac{W}{C} = - \int_{x_0}^x a_1 dx,$$

de donde:

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^x a_1 dx} \quad (7)$$

Notemos que se podría escribir la función (7), de modo que esta función satisfaga la ecuación (6). Es fácil cerciorarse de esto mediante sustitución directa de esta función en la ecuación (6). La suposición $W \neq 0$ no es necesaria.

La fórmula (7) se llama *fórmula de Litsville*.

Determinemos C de modo que se satisfaga la condición inicial. Poniendo $x = x_0$ en el primer y segundo miembros de la ecuación (7), obtenemos:

$$W_0 = C.$$

Por tanto, la solución que satisfaga las condiciones iniciales toma la forma:

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx} \quad (7')$$

Según la hipótesis, $W_0 \neq 0$. Pues, de la ecuación (7') se deduce que $W \neq 0$, cualquiera que sea el valor de x , puesto que la función exponencial no se reduce a cero para todos los valores finitos de la variable. El teorema queda demostrado.

Observación 1. Si el Wronskiano es nulo para cierto valor de $x = x_0$, este determinante también es igual a cero para cualquier valor de x en el segmento considerado.

Esto se deduce directamente de la fórmula (7): si $W = 0$ para $x = x_0$, entonces:

$$(W)_{x=x_0} = C = 0;$$

por consiguiente, $W \equiv 0$, cualquiera que sea el valor del límite superior de x en la fórmula (7).

Teorema 5. Si las soluciones y_1 e y_2 de la ecuación (3) son linealmente independientes en el segmento $[a, b]$, el Wronskiano W formado para estas soluciones no se reduce a cero en ningún punto del segmento indicado.

Indiquemos sólo la idea de demostración de este teorema, sin darla en forma completa.

Supongamos que $W = 0$ en cierto punto del segmento entonces, en virtud del teorema 3, el Wronskiano será nulo en todos los puntos del segmento $[a, b]$:

$$W = 0$$

6

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0.$$

Examinemos al principio los intervalos dentro del segmento $[a, b]$ donde $y_1 \neq 0$. Entonces,

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0$$

6

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0.$$

Por tanto, la razón $\frac{y_2}{y_1}$ es constante en cada uno de los intervalos mencionados:

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const.}$$

Utilizando el teorema de existencia y unicidad, se puede mostrar que $y_2 = \lambda y_1$ para todos los puntos del segmento $[a, b]$, incluyendo los puntos donde $y_1 = 0$, lo que es imposible, puesto que, según la hipótesis y_2 e y_1 son linealmente independientes. Por consiguiente, el Wronskiano no se anula en ningún punto del segmento $[a, b]$.

Teorema 6. Si y_1 e y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (3), entonces

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (8)$$

donde C_1 y C_2 son las constantes arbitrarias. Esta es la solución general de la ecuación (3).

Demostración. De los teoremas 1 y 2 se deduce que la función

$$C_1 y_1 + C_2 y_2$$

es la solución de la ecuación (3) cualesquiera que sean las constantes C_1 y C_2 .

Demostremos, ahora, que cualesquiera que sean las condiciones iniciales $y_{x=x_0} = y_0$, $y'_{x=x_0} = y'_0$, es posible elegir los valores de las constantes arbitrarias C_1 y C_2 de modo tal que la solución particular correspondiente $C_1 y_1 + C_2 y_2$ satisfaga las condiciones iniciales dadas.

Poniendo las condiciones iniciales en la igualdad (8), tenemos:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \\ y'_0 &= C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

donde se pone:

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}; (y_2)_{x=x_0} = y_{20}; (y'_1)_{x=x_0} = y'_{10}; (y'_2)_{x=x_0} = y'_{20}.$$

Del sistema (9) se puede definir C_1 y C_2 , puesto que el determinante de este sistema

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10} y'_{20} - y'_{10} y_{20}$$

es el Wronskiano cuando $x = x_0$, y, por tanto, no es igual a cero (en virtud de la independencia lineal de las soluciones y_1 e y_2). La solución particular que se deduce de la familia (8), para los valores hallados de C_1 y C_2 , satisface las condiciones iniciales dadas. De este modo el teorema queda demostrado.

Ejemplo 2. La ecuación

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0,$$

cuyos coeficientes $a_1 = \frac{1}{x}$ y $a_2 = \frac{1}{x^2}$ son continuos en todo el segmento, que no contiene el punto $x = 0$, admite las soluciones particulares:

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

(lo que se verifica fácilmente, sustituyéndolas en la ecuación). Por tanto, su solución general tiene la forma:

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}.$$

Observación 2. No existen métodos generales que permitan hallar en forma finita la solución general de una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables. Sin embargo, para las ecuaciones con coeficientes constantes tal método existe y será expuesto en el párrafo siguiente. En cuanto a las ecuaciones con coeficientes variables, en el capítulo XVI «Series» indicaremos algunos procedimientos para encontrar las soluciones aproximadas que satisfagan las condiciones iniciales.

Por ahora demostremos un teorema que permite hallar la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables, si se conoce una de sus soluciones particulares. Este teorema puede ser útil en muchos casos, siempre y cuando se logre encontrar directamente o adivinar, por cualquier método, una solución particular.

Teorema 7. *Si se conoce una solución particular de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, la búsqueda de la solución general se reduce a la integración de funciones.*

Demostración. Sea y_1 una solución particular conocida de la ecuación

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Halleemos otra solución particular de la ecuación dada de modo que y_1 e y_2 sean linealmente independientes. Entonces, la solución general se expresará mediante la fórmula $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. En virtud de la fórmula (7) (véase la demostración del teorema 4) se puede escribir:

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = C e^{-\int a_1 dx}$$

Así, para determinar y_2 tenemos una ecuación lineal de primer orden. Integrémosla de la manera siguiente. Dividamos todos los términos por y_1^2 :

$$\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a_1 dx}$$

6

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a_1 dx};$$

de donde:

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + C_2.$$

Puesto que buscamos una solución particular, poniendo $C_2 = 0$, $C = 1$, obtenemos:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx. \quad (10)$$

Es evidente, que y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes, puesto que $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const.}$

De tal modo, la solución general de la ecuación original tiene la forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx. \quad (11)$$

Ejemplo 3. Hallar la solución general de la ecuación:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Solución. Directamente se verifica que esta ecuación tiene una solución particular $y_1 = x$. Hallemos la segunda solución particular y_2 tal que y_1 e y_2 sean linealmente independientes.

Notemos que en nuestro caso $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$, en virtud de la fórmula (10) obtenemos:

$$\begin{aligned} y = x \int \frac{e^{\int \frac{2x dx}{1-x^2}}}{x^2} dx &= x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \\ &= x \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx = x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general tiene la forma:

$$y = C_1 x + C_2 \left(\frac{1}{2} x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1 \right).$$

§ 21. ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (1)$$

donde, p y q son números constantes reales. Según hemos demostrado, para hallar la integral general de esta ecuación es suficiente encontrar dos soluciones particulares linealmente independientes.

Busquemos las soluciones particulares en la forma

$$y = e^{kx}, \quad \text{donde } k = \text{const}; \quad (2)$$

entonces,

$$y' = k e^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Introduciendo las expresiones obtenidas de las derivadas en la ecuación (1), hallamos:

$$e^{kx} (k^2 + pk + q) = 0.$$

Como $e^{hx} \neq 0$, resulta que

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (3)$$

Por consiguiente, si k satisface a la ecuación (3), e^{kx} será solución de la ecuación (1). La (3) se llama *ecuación característica* respecto a la ecuación (1).

La ecuación característica es una ecuación de segundo orden que tiene dos raíces, las cuales designamos por k_1 y k_2 . Entonces

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Son posibles los casos siguientes:

I. k_1 y k_2 son números reales y distintos ($k_1 \neq k_2$);

II. k_1 y k_2 son números complejos;

III. k_1 y k_2 son números reales iguales ($k_1 = k_2$).

Examinemos cada caso por separado:

1. Las raíces de la ecuación característica son reales y distintas:
 $k_1 \neq k_2$. En este caso las soluciones particulares serán las funciones

$$y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Estas soluciones son linealmente independientes, puesto que

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const.}$$

Por tanto, la integral general tiene la forma

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Ejemplo 1. Sea la ecuación

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

La ecuación característica tiene la forma:

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Halleemos las raíces de la ecuación característica:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}; \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

La integral general es

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

II. Las raíces de la ecuación característica son complejas. Puesto que las raíces complejas son conjugadas en pares, introduzcamos las designaciones:

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

donde:

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Las soluciones particulares se pueden escribir en la forma:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} \quad (4)$$

Estas son funciones complejas de un argumento real que satisfacen la ecuación diferencial (1) (véase § 4, cap. VII).

Es evidente, que si alguna función compleja del argumento real

$$y = u(x) + iv(x) \quad (5)$$

satisface la ecuación (1), a esta ecuación satisfacen también las funciones $u(x)$ y $v(x)$.

En efecto, introduciendo la expresión (5) en la ecuación (1) tenemos:

$$\begin{aligned} [u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] &\equiv 0 \\ \text{ó} \\ (u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Pero una función compleja es nula solamente en el caso en que las partes real e imaginaria son iguales a cero, es decir,

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

$$v'' + pv' + qv = 0.$$

Hemos demostrado que $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones de la ecuación dada.

Escribamos las soluciones complejas (4) en la forma de una suma de las partes real e imaginaria:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - ie^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Según lo demostrado las funciones reales siguientes serán las soluciones particulares de la ecuación (1):

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (6')$$

$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (6'')$$

Las funciones $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$ son linealmente independientes, puesto que:

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \cotg \beta x \neq \text{const.}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación (1) en el caso en que las raíces de la ecuación característica son complejas, toma la forma:

$$y = A\tilde{y}_1 + B\tilde{y}_2 = Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \sin \beta x$$

ó

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x). \quad (7)$$

donde A y B son las constantes arbitrarias.

Ejemplo 2. Sea la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Hallar la integral general y la solución particular que satisface las condiciones iniciales: $y_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$.

Construir la gráfica.

Solución: 1) Escribamos la ecuación característica:

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

y encontremos sus raíces:

$$k_1 = -1 + 2i, k_2 = -1 - 2i.$$

Por tanto, la integral general es:

$$y = e^{-x} (A \cos 2x + B \sin 2x).$$

2) Hallemos la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas y determinemos los valores correspondientes de A y B . De la

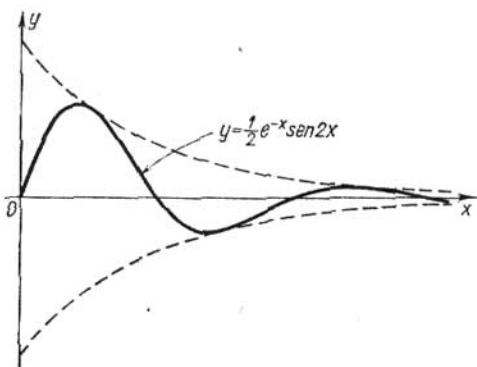


Fig. 267

primera condición se deduce:

$$0 = e^{-0} (A \cos 2 \cdot 0 + B \sin 2 \cdot 0), \text{ de donde: } A = 0.$$

Notemos que $y' = e^{-x} 2B \cos 2x - e^{-x} B \sin 2x$. De la segunda condición se deduce: $1 = 2B$,

es decir, $B = \frac{1}{2}$.

Pues, la solución particular buscada es:

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x.$$

La gráfica de la solución se muestra en la figura 267.

III. Las raíces de la ecuación característica son reales e iguales, es decir, $k_1 = k_2$. Una de las soluciones particulares, a saber, $y_1 = e^{k_1 x}$, se obtiene en virtud de los razonamientos precedentes. Es preciso encontrar la segunda solución particular, linealmente

independiente de la primera (la función $e^{k_2 x}$ es idénticamente igual a $e^{k_1 x}$, por lo que no puede considerarse como segunda solución particular).

Busquemos la segunda solución particular en la forma:

$$y_2 = u(x) e^{k_1 x},$$

donde $u(x)$ es una función desconocida a determinar.

Derivando, encontramos:

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u'' e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u).$$

Sustituyendo las expresiones de las derivadas en la ecuación (1), obtenemos:

$$e^{k_1 x} [u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0.$$

Como k_1 es una raíz múltiple de la ecuación característica, tenemos:

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0$$

$$\text{Además, } k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \text{ ó } 2k_1 = -p, \quad 2k_1 + p = 0.$$

Por tanto, para hallar $u(x)$, hace falta resolver la ecuación $e^{k_1 x} u'' = 0$ ó $u'' = 0$. Integrando, obtenemos: $u = Ax + B$. En particular, se puede poner $A = 1$, $B = 0$; entonces, $u = x$. Así, en calidad de segunda solución particular se puede tomar:

$$y_2 = x e^{k_1 x}.$$

Esta ecuación es linealmente independiente de la primera, puesto que $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const.}$

Por tanto, como integral general se puede tomar la función:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x).$$

Ejemplo 3. Sea la ecuación

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

La ecuación característica es $k^2 - 4k + 4 = 0$. Encontremos sus raíces $k_1 = k_2 = 2$. La integral general es:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

§ 22. ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS

DE n - ÉSIMO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Examinemos una ecuación lineal homogénea de n -ésimo orden:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1)$$

Supongamos que $a_1, a_2, \dots, a_n$ son las constantes. Antes de indicar un método de resolver la ecuación (1) introduzcamos una definición que será útil más adelante.

Definición 1. Si para todos los x del segmento $[a, b]$ se verifica la igualdad

$$\varphi_n(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \dots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n$ son constantes, de las cuales por lo menos una no es igual a cero, suele decirse que $\varphi_n(x)$ es una combinación lineal de las funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$.

Definición 2. n funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ se llaman linealmente independientes, si ninguna de ellas puede ser representada como combinación lineal de las otras.

Observación 1. De estas definiciones se deduce que si las funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ son linealmente dependientes, entonces existen las constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ de las cuales por lo menos una no es igual a cero. Estas constantes son tales que para todos los x del segmento $[a, b]$ se cumple la identidad:

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0.$$

Ejemplos:

1. Las funciones $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = 3e^x$ son linealmente dependientes, puesto que para $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = -\frac{1}{3}$ se verifica la identidad:

$$C_1e^x + C_2e^{2x} + C_33e^x \equiv 0.$$

2. Las funciones $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ son linealmente independientes, puesto que no se puede anular la expresión

$$C_1 \cdot 1 + C_2x + C_3x^2$$

cualesquiera que sean C_1, C_2, C_3 , siempre cuando no son simultáneamente iguales a cero.

3. Las funciones

$$y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}, \dots, y_n = e^{k_nx}, \dots, \text{ donde } k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$$

son números arbitrarios y linealmente independientes. (Demos esta afirmación sin demostración).

Pasemos, ahora, a la solución de la ecuación (1). Para esta ecuación es válido el teorema siguiente.

Teorema. Si las funciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (1), su solución general es:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n, \quad (2)$$

donde $C_1, \dots, C_n$ son constantes arbitrarias.

Si los coeficientes de la ecuación (1) son constantes, la solución general se halla del mismo modo como en el caso de la ecuación de segundo orden.

1) Formemos la ecuación característica:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

2) Hallemos las raíces de la ecuación característica:

$$k_1, k_2, \dots, k_n.$$

3) Según el carácter de las raíces, escribamos las soluciones particulares, linealmente independientes, partiendo de lo siguiente:

a) a toda raíz real simple k corresponde una solución particular e^{kx} ;

b) a todo par de raíces complejas conjugadas $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ y $k^{(2)} = \alpha - i\beta$, corresponden dos soluciones particulares: $e^{\alpha x} \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \sin \beta x$;

c) a toda raíz real k , de multiplicidad r corresponden r soluciones particulares linealmente independientes:

$$e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{r-1}e^{kx};$$

d) a todo par de raíces complejas conjugadas de multiplicidad μ : $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$, corresponden 2μ soluciones particulares:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{\mu-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

El número de estas soluciones particulares es igual al grado de la ecuación característica (es decir, al orden de la ecuación diferencial dada). Se puede demostrar que estas soluciones son linealmente independientes.

4) Al encontrar n soluciones particulares linealmente independientes $y_1, y_2, \dots, y_n$, formemos la solución general de la ecuación lineal dada:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

donde $C_1, C_2, \dots, C_n$ son las constantes arbitrarias.

Ejemplo 4. Hallar la solución general de la ecuación

$$y^{IV} - y = 0.$$

Solución. Formemos la ecuación característica

$$k^4 - 1 = 0.$$

Hallemos las raíces de esta ecuación

$$k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = i, k_4 = -i.$$

La integral general es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + A \cos x + B \sin x,$$

donde C_1, C_2, A, B son constantes arbitrarias.

Observación 2. De lo expuesto se deduce que toda la dificultad para resolver una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes consiste en la resolución de la ecuación característica correspondiente.

§ 23. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN

Sea una ecuación lineal no homogénea de segundo orden

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (1)$$

La estructura de la solución general de tal ecuación (1) se determinará por el teorema siguiente:

Teorema 1. *La solución general de la ecuación no homogénea (1) se representa como suma de cualquier solución particular y^* de esta ecuación y de la solución general $\bar{y}$ de la ecuación homogénea correspondiente*

$$\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y} = 0. \quad (2)$$

Demostración. Es preciso demostrar que la suma

$$y = \bar{y} + y^* \quad (3)$$

es la **solución general** de la ecuación (1).

Demostremos primeramente que la función (3) es una solución de la ecuación (1).

Sustituyendo la suma $\bar{y} + y^*$ en la ecuación (1), en lugar de y , tenemos:

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1 (\bar{y} + y^*)' + a_2 (\bar{y} + y^*) = f(x)$$

ó

$$(\bar{y}'' + a_1 \bar{y}' + a_2 \bar{y}) + (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) = f(x). \quad (4)$$

Como $\bar{y}$ es una solución de la ecuación (2), la expresión encerrada en el primer paréntesis es idénticamente igual a cero. Como y^* es una solución de la ecuación (1), la expresión encerrada en el segundo paréntesis es igual a $f(x)$. Por tanto, la igualdad (4) es una identidad, quedándose demostrada la primera parte del teorema.

Demostremos, ahora, que la expresión (3) es la solución general de la ecuación (1), es decir, que se pueden elegir las constantes arbitrarias que la integran de modo que se satisfagan las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

cualesquiera que sean x_0 , y_0 e y'_0 (siempre y cuando x_0 se toma en el dominio donde las funciones a_1 , a_2 y $f(x)$ son continuas).

Notemos que $\bar{y}$ se puede escribir en la forma:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

donde y_1 e y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (2); y C_1 , C_2 son constantes arbitrarias. La ecuación (3) se puede presentar en la forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*. \quad (3')$$

En virtud de las condiciones (5), tenemos*):

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_0^* = y_0,$$

$$C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + y_0^{*'} = y'_0.$$

De este sistema de ecuaciones es preciso determinar C_1 y C_2 . Escribamos el sistema en la forma:

$$\left. \begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} &= y_0 - y_0^*, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} &= y'_0 - y_0^{*'} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Notemos que el determinante de este sistema es el Wronskiano de las funciones y_1 e y_2 en el punto $x = x_0$. Puesto que, según la hipótesis, estas funciones son linealmente independientes, el Wronskiano no puede ser nulo. Por consiguiente, el sistema (6) tiene una solución bien determinada, C_1 y C_2 , es decir, existen los valores C_1 y C_2 tales que la fórmula (3) determina la solución de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales dadas. El teorema queda completamente demostrado.

Se puede concluir, pues, que si se conoce la solución general $\bar{y}$ de la ecuación homogénea (2), la tarea principal durante la integración de una ecuación no homogénea (1) consiste en la búsqueda de una solución particular cualquiera y^* de la última.

Indiquemos un método general para hallar las soluciones particulares de una ecuación no homogénea.

Método de variación de constantes arbitrarias. Escribamos la solución general de la ecuación homogénea (2):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (7)$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea (1) en la forma (7), considerando C_1 y C_2 como funciones de x , las que es preciso determinar.

Derivemos la igualdad (7):

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C'_1 y_1 + C'_2 y_2.$$

*) Aquí, y_{10} , y_{20} , y_0^* , y'_{10} , y'_{20} , $y_0^{*'}$ son los valores numéricos de las funciones y_1 , y_2 , y^* , y'_1 , y'_2 , $y^{*'}$ cuando $x = x_0$.

Elijamos las funciones C_1 y C_2 de modo que se verifique la igualdad

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \quad (8)$$

Tomando en consideración esta condición adicional, la primera derivada y' toma la forma:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Derivando esta expresión, hallamos y'' :

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'.$$

Introduciendo y , y' , y'' en la ecuación (1), obtenemos:

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + a_1 (C_1 y_1' + C_2 y_2') + \\ + a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

6

$$C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Las expresiones encerradas entre los dos primeros paréntesis se reducen a cero, puesto que y_1 y y_2 son las soluciones de la ecuación homogénea. Por consiguiente, la última ecuación toma la forma:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \quad (9)$$

Así, la función (7) es una solución de la ecuación (1), no homogénea, cuando las funciones C_1 y C_2 satisfacen al sistema de ecuaciones (8) y (9), es decir, si

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \quad C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Como el determinante de este sistema es un Wronskiano de las funciones linealmente independientes y_1 y y_2 , éste no es nulo; por tanto, resolviendo el sistema, hallemos C_1' y C_2' como funciones determinadas de x :

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x).$$

Integrando tenemos:

$$C_1 = \int \varphi_1(x) dx + \bar{C}_1; \quad C_2 = \int \varphi_2(x) dx + \bar{C}_2,$$

donde $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$ son las constantes de integración.

Introduciendo las expresiones obtenidas de C_1 y C_2 en la igualdad (7) hallemos una integral dependiente de dos constantes arbitrarias $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$, es decir, la solución general de la ecuación no homogénea*).

*) Al hacer $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$, obtendremos una solución particular de la ecuación (1).

Ejemplo. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Solución. Hallemos la solución general de la ecuación homogénea:

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

Como $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$, tenemos $\ln y' = \ln x + \ln c$; $y' = cx$; así:

$$y = C_1 x^2 + C_2.$$

Para que esta expresión sea la solución de la ecuación dada, es preciso determinar C_1 y C_2 como funciones de x del sistema

$$C_1' x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \quad 2C_1' x + C_2' \cdot 0 = x.$$

Resolviendo este sistema encontramos:

$$C_1' = \frac{1}{2}, \quad C_2' = -\frac{1}{2} x^2,$$

de donde, por integración, obtenemos:

$$C_1 = \frac{x}{2} + \bar{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2.$$

Introduciendo las funciones halladas en la fórmula $y = C_1 x^2 + C_2$, obtenemos la solución general de una ecuación no homogénea:

$$y = \bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}$$

ó $y = \bar{C}_1 x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{3}$, donde $\bar{C}_1$ y $\bar{C}_2$ son constantes arbitrarias.

Para buscar las soluciones particulares, se puede utilizar el siguiente teorema.

Teorema 2. Sea una ecuación no homogénea

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) \quad (10)$$

tal que su segundo miembro es la suma de dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Si y_1 es una solución particular de la ecuación

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x), \quad (11)$$

e y_2 , una solución particular de la ecuación

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x), \quad (12)$$

entonces, $y_1 + y_2$ es una solución particular*) de la ecuación (10).

*) Evidentemente, el teorema correspondiente es válido para cualquier número de sumandos del segundo miembro.

Demostración. Introduciendo la expresión $y_1 + y_2$ en la ecuación (10), obtenemos:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x) \quad (12)$$

$$(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = f_1(x) + f_2(x). \quad (13)$$

De las igualdades (11) y (12) se deduce que (13) es una identidad. El teorema queda demostrado.

§ 24. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea la ecuación diferencial

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (1)$$

donde p y q son números reales.

En el párrafo anterior hemos dado un método general para hallar las soluciones de las ecuaciones no homogéneas. Si la ecuación tiene coeficientes constantes, a veces, es más fácil hallar una solución particular, sin recurrir a la integración. Examinemos algunas variantes que se utilizan para resolver la ecuación (1).

1. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación (1) sea el producto de una función exponencial por un polinomio, que tiene la forma:

$$f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}, \quad (2)$$

donde $P_n(x)$ es un polinomio de n -ésimo grado. Entonces son posibles los siguientes casos particulares:

a) El número α no es una raíz de la ecuación característica

$$k^2 + pk + q = 0.$$

En este caso, es preciso hallar la solución particular en la forma:

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x}. \quad (3)$$

En efecto, introduciendo y^* en la ecuación (1), y reduciendo todos los términos por $e^{\alpha x}$, tenemos:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p) Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n(x) = P_n(x). \quad (4)$$

$Q_n(x)$ es un polinomio de n -ésimo grado, $Q_n'(x)$ es un polinomio de $(n-1)$ -ésimo grado: $Q_n''(x)$, es de $(n-2)$ -ésimo grado. Por consiguiente, a la derecha y a la izquierda del signo de igualdad se hallan polinomios de n -ésimo grado. Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x (el número de los coeficientes desconocidos es igual a $n+1$), obtenemos un sistema de $n+1$ ecuaciones para determinar los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$.

b) El número α es una raíz simple de la ecuación característica.

Si procuramos hallar una solución particular en la forma (3), obtenemos en el primer miembro de la igualdad (4) un polinomio de $(n-1)$ -ésimo grado, puesto que el coeficiente de $Q_n(x)$, es decir, $\alpha^2 + p\alpha + q$, es nulo y los polinomios $Q'_n(x)$ y $Q''_n(x)$ son de grados inferiores a n . Por consiguiente, la igualdad (4) no puede ser una identidad cualesquiera que sean $A_0, A_1, \dots, A_n$. Por esto, en el caso examinado busquemos la solución particular, en la forma de un polinomio de $(n+1)$ -ésimo grado sin término absoluto (puesto que éste se elimina durante la derivación*): $y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$.

c) α es una raíz doble de la ecuación característica. Entonces, al ser sustituida la función $Q_n(x)e^{\alpha x}$ en la ecuación diferencial, el grado de polinomio disminuye en dos unidades. En efecto, si α es una raíz de la ecuación característica, tenemos: $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$; además, puesto que α es una raíz doble, tenemos $2\alpha = -p$ (según el teorema de álgebra elemental, la suma de las raíces de la ecuación de segundo grado reducida es igual al coeficiente del término desconocido de primero grado tomado con signo contrario). Por eso, $2\alpha + p = 0$.

Por consiguiente, en el primer miembro de la igualdad (4) queda $Q''_n(x)$, es decir, un polinomio de $(n-2)$ -ésimo grado. Para obtener como resultado de la sustitución, un polinomio de n -ésimo grado, es preciso buscar una solución particular en la forma de producto de $e^{\alpha x}$ por un polinomio de $(n+2)$ -ésimo grado. Entonces, el término absoluto de este polinomio y el término de primer grado se eliminan durante la derivación. Por esto, se pueden omitir en la solución particular.

Así, cuando α es una raíz doble de la ecuación característica, se puede tomar una solución particular en la forma:

$$y^* = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}.$$

Ejemplo 1. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

Solución. La solución general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Como el segundo miembro de la ecuación no homogénea tiene la forma xe^{0x} , [es decir, la forma $P_1(x)e^{0x}$], y 0 no es raíz de la ecuación característica $k^2 + 4k + 3 = 0$, busquemos una solución particular en la forma $y^* = Q_1(x)e^{0x}$, es decir, haremos:

$$y^* = A_0 x + A_1.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación dada, tenemos:

$$4A_0 + 3(A_0 x + A_1) = x.$$

*) Notemos que todos los resultados expuestos arriba son válidos también cuando α es un número complejo (esto se deduce de las reglas de derivación de la función e^{mz} , donde m es un número complejo arbitrario; véase § 4, cap. VII).

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x , obtenemos:

$$3A_0 = 1, 4A_0 + 3A_1 = 0,$$

de donde:

$$A_0 = \frac{1}{3}; \quad A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Por consiguiente,

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

La solución general $y = \bar{y} + y^*$ será:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Ejemplo 2. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Solución: La solución general de la ecuación homogénea se halla fácilmente:

$$\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

El segundo miembro de la ecuación dada, $(x^2 + 1)e^{3x}$ tiene la forma:

$$P_2(x)e^{3x}.$$

Como el coeficiente 3 en el exponente de potencia no es raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = Q_2(x)e^{3x} \quad \text{ó} \quad y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación diferencial, tenemos:

$$\begin{aligned} [9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)]e^{3x} = \\ = (x^2 + 1)e^{3x}. \end{aligned}$$

Reduciendo ambos miembros por e^{3x} e igualando los coeficientes de las mismas potencias de x , obtenemos:

$$18A = 1, 12A + 18B = 0, 2A + 6B + 18C = 1,$$

de donde: $A = \frac{1}{18}$; $B = -\frac{1}{27}$; $C = \frac{5}{81}$. Por consiguiente, la solución particular es:

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}$$

y la solución general,

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81} \right) e^{3x}.$$

Ejemplo 3. Hallar la solución de la ecuación:

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x.$$

Solución. El segundo miembro de la ecuación tiene la forma $P_1(x)e^{1 \cdot x}$; donde el coeficiente 1 del exponente es raíz simple de un polinomio característico. Por tanto, busquemos una solución particular de la forma $y^* = xQ_1(x)e^x$ ó

$$y^* = x(Ax + B)e^x;$$

poniendo esta expresión en la ecuación, tenemos:

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x - 2)e^x$$

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x - 2)e^x.$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x obtenemos:

$$-10A = 1, \quad -5B + 2A = 2,$$

de donde: $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$. Por tanto, la solución particular es:

$$y^* = x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x,$$

y la solución general:

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x+x} \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x.$$

II. Supongamos que el segundo miembro tiene la forma:

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \quad (5)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Se puede analizar este caso mediante el procedimiento usado anteriormente, pasando de las funciones trigonométricas a las exponenciales.

Sustituyendo $\cos \beta x$ y $\operatorname{sen} \beta x$ por sus funciones exponenciales, según las fórmulas de Euler (véase § 5 cap. VII) obtenemos:

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q(x) e^{\alpha x} \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

6

$$f(x) = \left[\frac{1}{2} P(x) + \frac{1}{2i} Q(x) \right] e^{(\alpha+i\beta)x} + \left[\frac{1}{2} P(x) - \frac{1}{2i} Q(x) \right] e^{(\alpha-i\beta)x}. \quad (6)$$

Entre corchetes se encuentran los polinomios cuyos grados son iguales al grado superior de $P(x)$ y $Q(x)$. Resulta que hemos obtenido el segundo miembro de la forma tal, como en el caso I.

Es posible demostrar (aunque lo admitamos sin demostración) que se pueden hallar soluciones particulares que no contengan números complejos.

Por consiguiente, si el segundo miembro de la ecuación (1) tiene la forma

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \quad (7)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de x , la solución particular se determina así:

a) si número $\alpha + i\beta$ no es una raíz de la ecuación característica, es preciso buscar una solución particular de la ecuación (1) en la forma:

$$y^* = U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (8)$$

donde, $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios cuyo grado es igual al grado superior de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$;

b) si el número $\alpha + i\beta$ es una raíz de la ecuación característica, una solución particular adquiere la forma:

$$y^* = x[U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x]. \quad (9)$$

Para evitar errores eventuales notemos que las formas indicadas de las soluciones particulares (8) y (9) son válidas también, evidentemente, cuando en el segundo miembro de la ecuación (1) uno de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es idénticamente igual a cero, es decir, cuando el segundo miembro es de la forma:

$$P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{ó} \quad Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Consideremos, ahora, un importante caso particular. Supongamos que el segundo miembro de una ecuación lineal de segundo orden es:

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x, \quad (7')$$

donde, M y N son las constantes.

a) Si βi no es una raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x. \quad (8')$$

b) Si βi es una raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = x(A \cos \beta x + B \sin \beta x). \quad (9')$$

Notemos que la función (7') es un caso particular de la función (7) ($P(x) = M$, $Q(x) = N$, $\alpha = 0$); las funciones (8') y (9') son casos particulares de las funciones (8) y (9).

Ejemplo 4. Hallar la integral general de la ecuación lineal no homogénea

$$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x.$$

Solución. La ecuación característica

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

tiene las raíces: $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$. Por eso, la integral general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$\bar{y} = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = A \cos x + B \sin x,$$

donde, A y B son los coeficientes constantes a determinar. Introduciendo y^* en la ecuación dada, tenemos:

$$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x.$$

Igualando los coeficientes de $\cos x$ y $\sin x$, obtenemos dos ecuaciones para determinar A y B :

$$-A + 2B + 5A = 2; \quad -B - 2A + 5B = 0,$$

de donde

$$A = \frac{2}{5}; \quad B = \frac{1}{5}.$$

La solución general de la ecuación dada es: $y = \bar{y} + y^*$, es decir,

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{10} \sin x.$$

Ejemplo 5. Hallar la solución de la ecuación

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Solución. Las raíces de la ecuación característica son: $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$; por tanto, la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma:

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Entonces,

$$y^{*'} = 2x(-A \sin 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x),$$

$$y^{*''} = -4x(-A \cos 2x - B \sin 2x) + 4(-A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Introduciendo estas expresiones de las derivadas en la ecuación dada e igualando los coeficientes de $\cos 2x$ y $\sin 2x$, obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar A y B :

$$4B = 1; \quad -4A = 0,$$

de donde $A = 0$; $B = \frac{1}{4}$. Pues, la integral general de la ecuación dada es:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Ejemplo 6. Hallar la solución de la ecuación

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x.$$

Solución. El segundo miembro de la ecuación tiene la forma:

$$f(x) = e^{2x} (M \cos x + N \sin x),$$

siendo $M = 3$ y $N = 0$. Las raíces de la ecuación característica $k^2 - 1 = 0$ son: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. La solución general de la ecuación homogénea es:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Como el número $\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 1$ no es raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma: $y^* = e^{2x} (A \cos x + B \sin x)$.

Poniendo esta expresión en la ecuación y efectuando la reducción de los términos semejantes, obtenemos:

$$(2A + 4B) e^{2x} \cos x + (-4A + 2B) e^{2x} \sin x = 3e^{2x} \cos x.$$

Iguando los coeficientes de $\cos x$ y $\sin x$, tenemos:

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0.$$

De donde: $A = \frac{3}{10}$; $B = \frac{3}{5}$. Por consiguiente, la solución particular es:

$$y^* = e^{2x} \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right),$$

y la general,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x} \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \sin x \right).$$

§ 25. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE ORDENES SUPERIORES

Sea la ecuación

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (1)$$

donde, $a_1, a_2, \dots, a_n, f(x)$ son funciones continuas de x (o constantes).

Supongamos que se conoce la solución general:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (2)$$

de la ecuación homogénea:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0. \quad (3)$$

Igual que en el caso de la ecuación de segundo orden, para la ecuación (1) es válido el siguiente teorema:

Teorema. Si $\bar{y}$ es la solución general de la ecuación homogénea (3), e y^* es una solución particular de la ecuación no homogénea (1), entonces

$$Y = \bar{y} + y^*$$

es la solución general de la ecuación no homogénea.

Así, análogamente al caso de la ecuación de segundo orden, la integración de la ecuación (1) se reduce a la búsqueda de una solución particular de la ecuación no homogénea.

Igual que para la ecuación de segundo orden, se puede encontrar una solución particular de la ecuación (1) por el método de la variación de las constantes arbitrarias, suponiendo que en la expresión (2) $C_1, C_2, \dots, C_n$ son las funciones de x .

nes (4)] es una solución de la ecuación no homogénea (1), y, como la solución depende de n constantes arbitrarias $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n$, ésta es también la solución general.

El teorema queda demostrado.

A veces, se puede hallar más fácil las soluciones particulares de una ecuación no homogénea de orden superior con coeficientes constantes (§ 24). Se usan siguientes procedimientos:

1. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación diferencial sea una función $f(x) = P(x) e^{\alpha x}$, donde $P(x)$ es un polinomio de x . Es preciso distinguir dos casos:

a) si α no es una raíz de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = Q(x) e^{\alpha x},$$

donde $Q(x)$ es un polinomio del mismo grado que $P(x)$, pero con coeficientes indeterminados;

b) si α es una raíz de multiplicidad μ de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = x^\mu Q(x) e^{\alpha x},$$

donde $Q(x)$ es un polinomio del mismo grado que $P(x)$.

II. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación es de la forma:

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x,$$

donde M y N son números constantes. Entonces, la forma de la solución particular se define del modo siguiente:

a) si βi no es una raíz de la ecuación característica, la solución particular es de la forma:

$$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x,$$

donde A y B son coeficientes constantes indeterminados;

b) si βi es una raíz de la ecuación característica de multiplicidad μ , entonces:

$$y^* = x^\mu (A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

III. Sea

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

donde, $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de x . Entonces:

a) si $\alpha + \beta i$ no es una raíz del polinomio característico, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

donde $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios cuyo grado es igual al grado superior de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$;

b) si $\alpha + \beta i$ es una raíz de multiplicidad μ del polinomio característico, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = x^\mu [U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \sin \beta x],$$

donde $U(x)$ y $V(x)$ tienen el mismo significado que en el caso a).

Observación general respecto a los casos II y III. Si en el segundo miembro de la ecuación se halla una expresión que contenga sólo $\cos \beta x$ ó $\sin \beta x$, es preciso buscar una solución de la forma indicada arriba, es decir, con un seno y un coseno. En otras palabras, del hecho de que el segundo miembro no contenga $\cos \beta x$ ó $\sin \beta x$ de ninguna manera se deduce que la solución particular de la ecuación no contiene estas funciones. Podemos convencernos de lo último, examinando los ejemplos 4, 5, 6 del párrafo anterior, así como el ejemplo 2 del párrafo presente.

Ejemplo 1. Hallar la solución general de la ecuación

$$y^{IV} - y = x^3 + 1.$$

Solución. Las raíces de la ecuación característica $k^4 - 1 = 0$ son:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Hallemos la solución general de la ecuación homogénea (véase el ejemplo 4 § 22):

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Derivando y^* cuatro veces e introduciendo las expresiones obtenidas en la ecuación dada, tenemos:

$$-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1.$$

Igualemos los coeficientes de las mismas potencias de x :

$$-A_0 = 1; \quad -A_1 = 0; \quad -A_2 = 0; \quad -A_3 = 1.$$

Por tanto,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

Hallemos la integral general de la ecuación no homogénea según la fórmula: $y = \bar{y} + y^*$, es decir,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1.$$

Ejemplo 2. Hallar la solución de la ecuación

$$y^{IV} - y = 5 \cos x.$$

Solución. Las raíces de la ecuación característica $k^4 - 1 = 0$ son: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Luego, el segundo miembro de la ecuación no homogénea dada tiene la forma:

$$f(x) = M \cos x + N \sin x,$$

donde $M = 5$, $N = 0$.

Como i es una raíz simple de la ecuación característica, busquemos una solución particular de la forma:

$$y^* = x(A \cos x + B \sin x).$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación, hallamos:

$$4A \sin x - 4B \cos x = 5 \cos x,$$

de donde

$$4A = 0, \quad -4B = 5,$$

$$\text{ó, } A = 0, \quad B = -\frac{5}{4}.$$

La solución particular de la ecuación diferencial dada es, entonces:

$$y^* = -\frac{5}{4} x \sin x,$$

y la solución general es:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4} x \sin x.$$

§ 26. ECUACION DIFERENCIAL DE OSCILACIONES MECANICAS

El objeto del párrafo presente y de los siguientes es el estudio de un problema de la mecánica aplicada con ayuda de las ecuaciones diferenciales lineales.

Supongamos que una carga de masa Q reposa sobre un resorte elástico (fig. 268). Designemos por y la desviación de la carga de

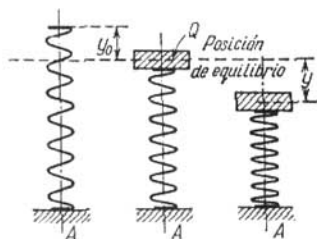


Fig. 268

su posición de equilibrio. Consideremos la desviación hacia abajo como positiva y hacia arriba, como negativa. En la posición de equilibrio la fuerza del peso es compensada por la elasticidad del resorte. Supongamos que la fuerza que tiende a volver la carga a la

posición de equilibrio, llamada elástica, sea proporcional a la desviación, es decir, la fuerza elástica es igual a $-ky$, donde k es una magnitud constante para el resorte dado (así llamada «rigidez del resorte»)*).

Supongamos que al movimiento de la carga Q se opone una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad del movimiento de la

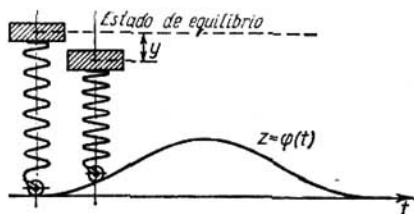


Fig. 269

carga respecto al punto más bajo del resorte, es decir: una fuerza $-\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$, donde $\lambda = \text{const} > 0$ (amortiguador). Formemos la ecuación diferencial del movimiento de la carga sobre el resorte. En virtud de la segunda ley de Newton tenemos:

$$Q \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

(aquí, k y λ son números positivos). Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

Escribámosla en la forma:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad (1)$$

donde

$$p = \frac{\lambda}{Q}; \quad q = \frac{k}{Q}.$$

Supongamos, ahora, que el punto inferior del resorte efectúa movimientos verticales según la ley $z = \varphi(t)$. Este fenómeno puede tener lugar, por ejemplo, cuando el extremo inferior del resorte está fijado a un rodillo que junto con el resorte y la carga se mueve a lo largo de un camino de relieve desigual (fig. 269).

*) Los resortes cuya fuerza elástica es proporcional a la deformación se llaman resortes con «característica lineal».

En este caso la fuerza elástica no es igual a $-ky$, sino a $-k[y + \varphi(t)]$; la fuerza de resistencia será $-\lambda[y' + \varphi'(t)]$, y en lugar de la ecuación (1) obtenemos la ecuación:

$$Q \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t) \quad (2)$$

ó

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad (2')$$

donde:

$$f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{Q}.$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial no homogénea de segundo orden.

La ecuación (1') se llama ecuación de las oscilaciones libres; la (2'), de las oscilaciones forzadas.

§ 27. OSCILACIONES LIBRES

Examinemos primero la ecuación de las oscilaciones libres

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Escribamos la ecuación característica correspondiente:

$$k^2 + pk + q = 0,$$

y hallemos sus raíces:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

1) Sea $\frac{p^2}{4} > q$. En este caso las raíces k_1 y k_2 son números reales negativos. La solución general se expresa mediante funciones exponenciales:

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad (k_1 < 0, k_2 < 0). \quad (1)$$

De esta fórmula se deduce que cualesquiera que sean las condiciones iniciales, la desviación y tiende asintóticamente a cero, cuando $t \rightarrow \infty$. En el caso dado no habrán oscilaciones, puesto que las fuerzas de frenado son grandes en comparación con el coeficiente de rigidez k del resorte.

2) Sea $\frac{p^2}{4} = q$; entonces la raíz k_1 equivale a k_2 y ambas son iguales al número negativo $-\frac{p}{2}$. Por tanto, la solución general es:

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{p}{2}t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{pt}{2}}. \quad (2)$$

Aquí la desviación también tiende a cero para $t \rightarrow \infty$, sin embargo, con menor velocidad que en el caso anterior (merced a la presencia del factor $C_1 + C_2 t$).

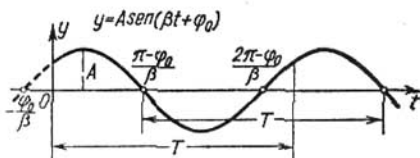


Fig. 270

3) Sea $p = 0$, es decir, supongamos que no hay fuerza de frenado. La ecuación característica tiene la forma:

$$k^2 + q = 0,$$

y sus raíces son: $k_1 = \beta i$; $k_2 = -\beta i$, donde $\beta = \sqrt{q}$.

La solución general es:

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \quad (3)$$

Sustituyamos en la última fórmula las constantes arbitrarias C_1 y C_2 por otras A y φ_0 ligadas con C_1 y C_2 por las relaciones:

$$C_1 = A \sin \varphi_0, \quad C_2 = A \cos \varphi_0.$$

Las constantes A y φ_0 en función de C_1 y C_2 se determinan así:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{C_1}{C_2}.$$

Introduciendo los valores de C_1 y C_2 en la fórmula (3), obtenemos:

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \sin \beta t$$

6

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0). \quad (3')$$

Estas oscilaciones se llaman *armónicas*. Las curvas integrales son las sinusoides. El intervalo de tiempo T , durante el cual el

argumento del seno varía en 2π , se llama *período* de oscilaciones; en nuestro caso $T = \frac{2\pi}{\beta}$. El número de oscilaciones durante el tiempo 2π se llama *frecuencia* de oscilaciones. En el caso dado la frecuencia es igual a β . La constante A que es la desviación máxima

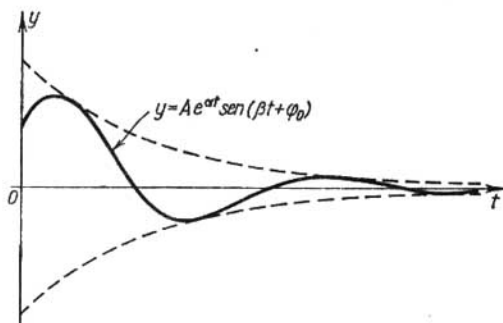


Fig. 271

a partir de la posición de equilibrio se llama *amplitud* de movimiento oscilatorio y φ_0 es la *fase inicial*. La gráfica de la función (3') se da en la figura 270.

4) Sea $p \neq 0$ y $\frac{p^2}{4} < q$.

En este caso las raíces de la ecuación característica son los números complejos:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta,$$

donde

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

La integral general tiene la forma:

$$y = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \quad (4)$$

6

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0). \quad (4')$$

Como amplitud estamos obligados a tomar la magnitud $Ae^{\alpha t}$ que depende del tiempo. Como $\alpha < 0$, la magnitud tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$, es decir, en este caso, se trata de *oscilaciones amortiguadas*. La gráfica de estas oscilaciones se da en la figura 271.

§ 28. OSCILACIONES FORZADAS

La ecuación de las oscilaciones forzadas tiene la forma:

$$y'' + py' + qy = f(t).$$

Analicemos el importante caso práctico, cuando la fuerza perturbadora externa está representada por la función periódica

$$f(t) = a \operatorname{sen} \omega t;$$

entonces, la ecuación toma la forma

$$y'' + py' + qy = a \operatorname{sen} \omega t. \quad (1)$$

1) Supongamos al principio que $p \neq 0$ y $\frac{p^2}{4} < q$, es decir, las raíces de la ecuación característica son los números complejos $\alpha \pm i\beta$. En este caso (véase fórmulas (4) y (4') § 27), la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma:

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \varphi_0). \quad (2)$$

Busquemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma:

$$y^* = M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t. \quad (3)$$

Introduciendo esta expresión de y^* en la ecuación diferencial original, encontramos los valores de M y N :

$$M = \frac{-p\omega a}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}; \quad N = \frac{(q - \omega^2)a}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Antes de introducir los valores hallados de M y N en la igualdad (3), introduzcamos las nuevas constantes A^* y φ^* , haciendo

$$M = A^* \operatorname{sen} \varphi^*, \quad N = A^* \cos \varphi^*,$$

es decir,

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M}{N}.$$

Entonces, la solución particular de la ecuación no homogénea se puede escribir en la forma

$y^* = A^* \operatorname{sen} \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \operatorname{sen} \omega t = A^* \operatorname{sen}(\omega t + \varphi^*)$,
o, en definitiva,

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi^*).$$

La integral general de la ecuación (1) es igual a $y = \bar{y} + y^*$, es decir,

$$y = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*).$$

El primer término de la suma que se encuentra en el segundo miembro (la solución de la ecuación homogénea) representa las oscilaciones amortiguadas. Este término disminuye al crecer t , y, por tanto, dentro de cierto intervalo de tiempo, el segundo miembro adquiere el valor principal, que determina las oscilaciones forzadas. La frecuencia ω de estas oscilaciones es igual a la frecuencia de la fuerza externa $f(t)$; la amplitud de las oscilaciones forzadas es tanto mayor, cuanto menor es p y cuanto más se acerque ω^2 a q .

Analicemos más detalladamente cómo la amplitud de las oscilaciones forzadas depende de la frecuencia ω , para diferentes valores de p . Designemos por $D(\omega)$ la amplitud de las oscilaciones forzadas:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}}.$$

Hagamos $q = \beta_1^2$ (para $p = 0$; β_1 sería igual a la frecuencia de las oscilaciones propias). Entonces tenemos:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2 - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2 + \frac{p^2}{\beta_1^2} \frac{\omega^2}{\beta_1^2}}}.$$

Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{\omega}{\beta_1} = \lambda; \quad \frac{p}{\beta_1} = \gamma,$$

donde, λ es la razón de la frecuencia de la fuerza perturbadora a la frecuencia de las oscilaciones libres del sistema; la constante λ no depende de la fuerza perturbadora. La magnitud de la amplitud se expresa entonces por la fórmula:

$$\bar{D}(\lambda) = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2}}. \quad (4)$$

Halleemos el máximo de esta función. Este corresponderá evidentemente al valor de λ , para el cual el cuadrado del denominador sea mínimo. Pero el mínimo de la función

$$\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2} \quad (5)$$

se alcanza cuando

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}},$$

y es igual a

$$\gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Por tanto, la magnitud máxima de la amplitud es igual a

$$\bar{D}_{\text{máx}} = \frac{a}{\beta_1^2 \gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Las gráficas de la función $\bar{D}(\lambda)$ para diferentes valores de γ , se dan en la figura 272 (para concretar las ideas, al construir las

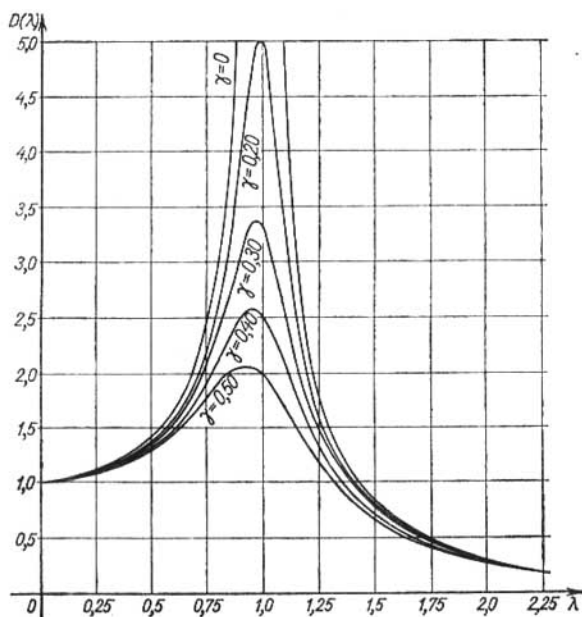


Fig. 272

gráficas, hagamos: $a = 1$, $\beta_1 = 1$). Estas curvas se llaman curvas de resonancia.

De la fórmula (5) se deduce que para γ pequeñas el valor máximo de la amplitud se alcanza cuando los valores de λ son próximos a la unidad, es decir, cuando la frecuencia de la fuerza externa es próxima a la de oscilaciones libres. Si $\gamma = 0$ (por tanto, $p = 0$), es decir, si no existe resistencia al movimiento, la amplitud de las oscilaciones forzadas crece indefinidamente cuando $\lambda \rightarrow 1$, es decir, para $\omega \rightarrow \beta_1 = \sqrt{q}$:

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ (\gamma=0)}} \bar{D}(\lambda) = \infty.$$

Cuando $\omega^2 = q$, tiene lugar el fenómeno de resonancia.

2) Supongamos ahora que $p = 0$, es decir, examinemos la ecuación de oscilaciones elásticas sin resistencia, en presencia de una fuerza externa periódica:

$$y'' + qy = a \sin \omega t. \quad (6)$$

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$\bar{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \quad (\beta^2 = q).$$

Si $\beta \neq \omega$, es decir, si la frecuencia de la fuerza externa no es igual a la frecuencia de las oscilaciones propias la solución particular de la ecuación no homogénea se escribe en la forma:

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t.$$

Poniendo esta expresión en la ecuación de partida, hallamos

$$M = 0, \quad N = \frac{a}{q - \omega^2}.$$

La solución general es:

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \sin \omega t.$$

Así, el movimiento se obtiene como resultado de la superposición de las oscilaciones propias de frecuencia β y de las oscilaciones forzadas de frecuencia ω .

Si $\beta = \omega$, es decir, la frecuencia de las oscilaciones propias coincide con la frecuencia de la fuerza externa, la función (3) no es solución de la ecuación (6). En este caso, en virtud de los resultados del § 24, busquemos una solución particular de la forma

$$y^* = t (M \cos \omega t + N \sin \omega t). \quad (7)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación, encontremos M y N :

$$M = -\frac{a}{2\omega}; \quad N = 0.$$

Por tanto:

$$y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \omega t.$$

La solución general es de la forma:

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\omega} t \cos \beta t.$$

El segundo término del segundo miembro muestra que, en este caso, la amplitud de las oscilaciones crece indefinidamente cuando el tiempo t crece de la misma manera ($t \rightarrow \infty$). Este fenómeno que tiene lugar cuando la frecuencia de las propias oscilaciones del sistema coincide con la frecuencia de la fuerza externa, se llama *resonancia*.

La gráfica de la función y^* está dada en la figura 273.

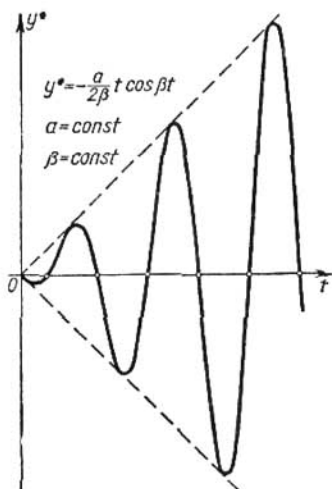


Fig. 273

§ 29. SISTEMAS

DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Durante la resolución de un gran número de problemas se necesita hallar las funciones $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\dots$, $y_n = y_n(x)$, que satisfagan a un sistema de ecuaciones diferenciales bajo la condición de que estas ecuaciones contienen el argumento x , las funciones desconocidas $y_1, y_2, \dots, y_n$ y sus derivadas.

Examinemos el sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde $y_1, y_2, \dots, y_n$ son las funciones desconocidas, y x es el argumento.

Un sistema que tiene en los primeros miembros de las ecuaciones las derivadas de primer orden y en los segundos miembros no las tiene se llama *sistema normal*.

Integrar este sistema significa determinar las funciones $y_1, y_2, \dots, y_n$, que satisfagan al sistema (1) de ecuaciones y a las condiciones iniciales dadas:

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}, (y_2)_{x=x_0} = y_{20}, \dots, (y_n)_{x=x_0} = y_{n0}. \quad (2)$$

La integración del sistema de la forma (1) se realiza del modo siguiente.

Derivemos la primera de las ecuaciones (1) respecto a x :

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx}.$$

Sustituyendo las derivadas $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ por sus expresiones respectivas $f_1, f_2, \dots, f_n$ de las ecuaciones (1) obtenemos:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \dots, y_n).$$

Derivando la ecuación obtenida y procediendo de la misma manera hallamos:

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Continuando así, obtenemos en definitiva, una ecuación

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \dots, y_n).$$

De este modo hemos obtenido el sistema siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= F_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} &= F_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Solución:

1) Derivando la primera ecuación respecto a x , tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1.$$

Sustituyendo aquí las expresiones $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$, tomadas de las ecuaciones (a), obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y + z + x) + (-4y - 3z + 2x) + 1$$

ó

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1. \quad (c)$$

2) De la primera ecuación del sistema (a) hallamos:

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x \quad (d)$$

y, haciendo la sustitución en la ecuación (c), obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2\left(\frac{dy}{dx} - y - x\right) + 3x + 1$$

ó

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1. \quad (e)$$

La solución general de la última ecuación es:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9 \quad (f)$$

y en virtud de (d):

$$z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14. \quad (g)$$

Elijamos las constantes C_1 y C_2 de manera que se satisfagan las condiciones iniciales (b):

$$(y)_{x=0} = 1, \quad (z)_{x=0} = 0.$$

Entonces de las igualdades (f) y (g) se deduce:

$$1 = C_1 - 9; \quad 0 = C_2 - 2C_1 + 14,$$

de donde: $C_1 = 10$; $C_2 = 6$.

Por consiguiente, la solución que satisface a las ecuaciones iniciales dadas (b) toma la forma:

$$y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9, \quad z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14.$$

Observación (2). En los razonamientos expuestos hemos supuesto que es posible determinar las funciones $y_2, y_3, \dots, y_n$ de las primeras $(n - 1)$ ecuaciones del sistema (3). Pero, puede ocurrir que las variables $y_2, \dots, y_n$ se eliminan del número menor que de n ecuaciones. Entonces para determinar y obtenemos una ecuación de orden inferior a n .

Ejemplo 2. Integrar el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = y + z; \quad \frac{dy}{dt} = x + z; \quad \frac{dz}{dt} = x + y.$$

Solución. Derivando la primera ecuación respecto a t , hallamos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = (x + z) + (x + y), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z.$$

Eliminando las variables y y z de las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = y + z; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z,$$

obtenemos una ecuación de segundo orden respecto a x :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

Integrando esta ecuación obtenemos su solución general:

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \quad (\alpha)$$

de donde hallamos:

$$\frac{dx}{dt} = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \quad \text{y} \quad y = \frac{dx}{dt} - z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - z. \quad (\beta)$$

Poniendo las expresiones halladas para x e y en la tercera ecuación del sistema dado, obtenemos una ecuación que permite determinar z :

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2 e^{2t}.$$

Integrando esta ecuación, hallamos

$$z = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}. \quad (\gamma)$$

Pero, entonces, en virtud de las ecuaciones (β) obtenemos

$$y = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}. \quad (\delta)$$

Las ecuaciones (α) , (δ) y (γ) dan la solución general del sistema propuesto.

Las ecuaciones diferenciales de un sistema pueden contener las derivadas de órdenes superiores. En este caso se forma el sistema de las ecuaciones diferenciales de órdenes superiores.

Así, por ejemplo, el problema del movimiento de un punto material bajo la acción de la fuerza F se reduce a un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden. Sean F_x , F_y , F_z las proyecciones de la fuerza F sobre los ejes de coordenadas. La posición del punto en cada instante t se determina por sus coordenadas x , y , z . Por consiguiente, x , y , z , son funciones de t . Las proyecciones del vector de la velocidad del punto material sobre los ejes de coordenadas serán:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

Supongamos que la fuerza F y, por consiguiente, sus proyecciones F_x , F_y , F_z dependen del tiempo t , las posiciones x , y , z del punto y de la velocidad de su movimiento, es decir $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Las funciones buscadas en este problema son:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Estas funciones se determinan a partir de las ecuaciones de la dinámica (ley de Newton):

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Hemos obtenido un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden. Si el movimiento es plano, es decir, si la trayectoria es una curva plana (que yace, por ejemplo, en el plano Oxy), obtenemos un sistema de dos ecuaciones para determinar las funciones $x(t)$ e $y(t)$:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \quad (9)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right). \quad (10)$$

Se puede resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de órdenes superiores, reduciéndolo a un sistema de ecuaciones de primer orden. Utilizando, por ejemplo, las ecuaciones (9) y (10), mostremos el método de la resolución. Introduzcamos las designaciones:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v.$$

Entonces:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

El sistema de dos ecuaciones (9) y (10) de segundo orden con dos funciones $x(t)$ e $y(t)$ desconocidas se sustituye por un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden con cuatro funciones desconocidas x, y, u, v :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u, & \frac{dy}{dt} &= v, \\ m \frac{du}{dt} &= F_x(t, x, y, u, v), \\ m \frac{dv}{dt} &= F_y(t, x, y, u, v). \end{aligned}$$

Notemos en conclusión, que este método general para solucionar los sistemas de ecuaciones diferenciales se puede reemplazar, en algunos casos concretos, por uno u otro procedimiento artificial que conduce más rápidamente al objetivo.

Ejemplo 3. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = y.$$

Como hemos indicado en el párrafo anterior se puede resolver este sistema, reduciéndolo a una ecuación de orden n , la cual, en el caso concreto dado será lineal (véase la observación 1 del párrafo anterior). Sin embargo, se puede resolver el sistema (1) por otro método, sin reducirlo a la ecuación de n -ésimo orden. Este método permite analizar, de manera más ilustrativa, el carácter de las soluciones.

ó $k^2 - 5k + 4 = 0$. Hallamos sus raíces:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 4.$$

Buscamos la solución del sistema en la forma:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \alpha_1^{(1)} e^t, & x_2^{(1)} &= \alpha_2^{(1)} e^t \\ x_1^{(2)} &= \alpha_1^{(2)} e^{4t}, & x_2^{(2)} &= \alpha_2^{(2)} e^{4t}. \end{aligned}$$

Formemos el sistema (3) para la raíz $k_1 = 1$ y determinemos $\alpha_1^{(1)}$ y $\alpha_2^{(1)}$:

$$\left. \begin{aligned} (2-1) \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} &= 0, \\ 1\alpha_1^{(1)} + (3-1) \alpha_2^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ó

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} &= 0, \\ \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

de donde: $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2} \alpha_1^{(1)}$. Poniendo $\alpha_1^{(1)} = 1$, obtenemos: $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}$. Así hemos obtenido la solución del sistema:

$$x_1^{(1)} = e^t, \quad x_2^{(1)} = -\frac{1}{2} e^t.$$

Formemos, ahora, el sistema (3) para la raíz $k_2 = 4$ y determinemos $\alpha_1^{(2)}$ y $\alpha_2^{(2)}$:

$$\begin{aligned} -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} &= 0, \\ \alpha_1^{(2)} - 2\alpha_2^{(2)} &= 0, \end{aligned}$$

de donde: $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$ y $\alpha_1^{(2)} = 1$, $\alpha_2^{(2)} = 1$. Obtenemos pues, la segunda solución del sistema:

$$x_1^{(2)} = e^{4t}, \quad x_2^{(2)} = e^{4t}.$$

La solución general del sistema será [véase (6)]:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^t + C_2 e^{4t}, \\ x_2 &= -\frac{1}{2} C_1 e^t + C_2 e^{4t}. \end{aligned}$$

II. Las raíces de la ecuación característica son distintas, pero incluyen raíces complejas. Supongamos que entre las raíces de la ecuación característica hay dos raíces complejas conjugadas:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

A estas raíces corresponden las soluciones:

$$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)t} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

$$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha - i\beta)t} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Los coeficientes $\alpha_j^{(1)}$ y $\alpha_j^{(2)}$ se determinan del sistema de ecuaciones (3).

Igual que en § 21 (cap. XIII), se puede mostrar que las partes real e imaginaria de la solución compleja son también soluciones. De esta manera obtenemos dos soluciones particulares:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_j^{(1)} &= e^{\lambda_j^{(1)} t} (\lambda_j^{(1)} \cos \beta x + \lambda_j^{(2)} \operatorname{sen} \beta x), \\ \bar{x}_j^{(2)} &= e^{\lambda_j^{(2)} t} (\bar{\lambda}_j^{(1)} \operatorname{sen} \beta x + \bar{\lambda}_j^{(2)} \cos \beta x), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

donde $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\bar{\lambda}_j^{(1)}$, $\bar{\lambda}_j^{(2)}$ son números reales, determinados mediante $\alpha_j^{(1)}$ y $\alpha_j^{(2)}$.

Las combinaciones correspondientes de las funciones (9) entran en la solución general del sistema:

Ejemplo 2. Hallar la solución general del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -7x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 - 5x_2. \end{aligned}$$

Solución. Formemos la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

ó $k^2 + 12k + 37 = 0$ y encontremos sus raíces:

$$k_1 = -6 + i, \quad k_2 = -6 - i.$$

Sustituyendo $k_1 = -6 + i$ en el sistema (3), hallamos:

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \quad \alpha_2^{(1)} = 1 + i.$$

Escribimos la solución (7):

$$x_1^{(1)} = 1e^{(-6+i)t}, \quad x_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)t}. \quad (7')$$

Sustituyendo $k_2 = -6 - i$ en el sistema (3), hallamos:

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1 - i.$$

Obtengamos el segundo sistema de las soluciones (8):

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t}, \quad x_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)t}. \quad (8')$$

Escribimos en otra forma la solución (7'):

$$x_1^{(1)} = e^{-6t} (\cos t + i \operatorname{sen} t), \quad x_2^{(1)} = (1+i)e^{-6t} (\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

ó

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= e^{-6t} \cos t + ie^{-6t} \operatorname{sen} t, \\ x_2^{(1)} &= e^{-6t} (\cos t - \operatorname{sen} t) + ie^{-6t} (\cos t + \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

Escribimos en otra forma la solución (8'):

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= e^{-6t} \cos t - ie^{-6t} \operatorname{sen} t, \\ x_2^{(2)} &= e^{-6t} (\cos t - \operatorname{sen} t) - ie^{-6t} (\cos t + \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

Como los sistemas de las soluciones particulares podemos tomar las partes reales e imaginarias por separado

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1^{(1)} &= e^{-6t} \cos t, & \bar{x}_2^{(1)} &= e^{-6t} (\cos t - \sin t), \\ \bar{x}_1^{(2)} &= e^{-6t} \sin t, & \bar{x}_2^{(2)} &= e^{-6t} (\cos t + \sin t). \end{aligned} \right\} \quad (9')$$

La solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{-6t} \cos t + C_2 e^{-6t} \sin t, \\ x_2 &= C_1 e^{-6t} (\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t} (\cos t + \sin t). \end{aligned}$$

De modo análogo se puede hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de órdenes superiores con coeficientes constantes.

En la mecánica y la teoría de circuitos eléctricos se estudia, por ejemplo, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Luego buscamos la solución en la forma:

$$x = \alpha e^{kt}, \quad y = \beta e^{kt}.$$

Introduciendo estas expresiones en el sistema (10) y simplificando por e^{kt} , obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar α , β y k :

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - k^2)\alpha + a_{12}\beta &= 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k^2)\beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Siendo α y β distintas de cero, se determinan solamente cuando el determinante del sistema es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Esta es la ecuación característica para el sistema (10). Es la ecuación de cuarto orden respecto a k . Sean k_1, k_2, k_3, k_4 sus raíces (supongamos que las raíces son diferentes). Para cada raíz k_i del sistema (11) hallamos los valores de α y β . Igual que en el caso (6) la solución general tiene la forma:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \alpha^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \alpha^{(2)} e^{k_2 t} + C_3 \alpha^{(3)} e^{k_3 t} + C_4 \alpha^{(4)} e^{k_4 t}, \\ y &= C_1 \beta^{(1)} e^{k_1 t} + C_2 \beta^{(2)} e^{k_2 t} + C_3 \beta^{(3)} e^{k_3 t} + C_4 \beta^{(4)} e^{k_4 t}. \end{aligned}$$

Si entre las raíces hay unas complejas, a cada par de raíces complejas en la solución general corresponden las expresiones de la forma (9).

Ejemplo 3. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - 4y, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -x + y.$$

Solución. Escribamos la ecuación característica (12) y encontremos sus raíces:

$$\begin{vmatrix} 1-k^2 & -4 \\ -1 & 1-k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$k_1 = i, \quad k_2 = -i, \quad k_3 = \sqrt{3}, \quad k_4 = -\sqrt{3}.$$

Buscamos la solución en la forma:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \alpha^{(1)} e^{it}, & y^{(1)} &= \beta^{(1)} e^{it}, \\ x^{(2)} &= \alpha^{(2)} e^{-it}, & y^{(2)} &= \beta^{(2)} e^{-it}, \\ x^{(3)} &= \alpha^{(3)} e^{\sqrt{3}t}, & y^{(3)} &= \beta^{(3)} e^{\sqrt{3}t}, \\ x^{(4)} &= \alpha^{(4)} e^{-\sqrt{3}t}, & y^{(4)} &= \beta^{(4)} e^{-\sqrt{3}t}. \end{aligned}$$

Del sistema (11) encontramos $\alpha^{(j)}$ y $\beta^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} &= 1, & \beta^{(1)} &= \frac{1}{2}, \\ \alpha^{(2)} &= 1, & \beta^{(2)} &= \frac{1}{2}, \\ \alpha^{(3)} &= 1, & \beta^{(3)} &= -\frac{1}{2}, \\ \alpha^{(4)} &= 1, & \beta^{(4)} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Escribimos las soluciones complejas:

$$x^{(1)} = e^{-it} = \cos t + i \sin t, \quad y^{(1)} = \frac{1}{2} (\cos t + i \sin t),$$

$$x^{(2)} = e^{-it} = \cos t - i \sin t, \quad y^{(2)} = \frac{1}{2} (\cos t - i \sin t).$$

Las partes real e imaginaria, tomadas por separado forman las soluciones:

$$\bar{x}^{(1)} = \cos t, \quad \bar{y}^{(1)} = \frac{1}{2} \cos t,$$

$$\bar{x}^{(2)} = \sin t, \quad \bar{y}^{(2)} = \frac{1}{2} \sin t.$$

Escribimos, ahora, la solución general:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{\sqrt{3}t} + C_4 e^{-\sqrt{3}t}, \\ y &= C_1 \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} C_2 \sin t - C_3 \frac{1}{2} e^{\sqrt{3}t} - C_4 \frac{1}{2} e^{-\sqrt{3}t}. \end{aligned}$$

Observación. No hemos analizado aquí el caso de raíces múltiples de la ecuación característica que está fuera de las tareas del libro presente.

§ 31. NOCION SOBRE LA TEORIA DE LA ESTABILIDAD DE LIAPUNOV

Como las soluciones de la mayoría de las ecuaciones diferenciales y de los sistemas de ecuaciones no se expresan mediante funciones elementales o cuadraturas, en estos casos, para resolver las ecuaciones diferenciales concretas, se usan los métodos de integración aproximada. Ya hemos dado algunas nociones de estos métodos en el § 3 (capítulo XIII tomo II); otros métodos los analizaremos en los §§ 32-34 y también en el capítulo XVI.

La deficiencia de estos métodos es que ellos dan sólo una solución particular; para obtener otras soluciones particulares es preciso realizar de nuevo todos los cálculos. Conociendo una solución particular, no se puede juzgar sobre el carácter de las otras soluciones.

En muchos problemas de mecánica y técnica tiene importancia saber no los valores concretos de la solución correspondientes a los valores concretos dados del argumento, sino el carácter de variación de la solución cuando cambia el argumento y, en particular, cuando éste crece indefinidamente. Por ejemplo, tiene importancia saber, si las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas son periódicas, o si ellas tienden asintóticamente hacia una función conocida, etc. Estos problemas son de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

La cuestión de la estabilidad de una solución o de un movimiento es uno de los problemas fundamentales de la teoría cualitativa; este problema fue detalladamente analizado por el célebre matemático ruso A. M. Liapunov (1857-1918).

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ las soluciones de este sistema que satisfagan las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{aligned} x_{t=0} &= x_0, \\ y_{t=0} &= y_0. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Sean, además, $\bar{x} = \bar{x}(t)$ e $\bar{y} = \bar{y}(t)$ las soluciones del sistema (1) que satisfagan a las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{t=0} &= \bar{x}_0, \\ \bar{y}_{t=0} &= \bar{y}_0. \end{aligned} \right\} \quad (1'')$$

Definición. Las soluciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$, que satisfagan las ecuaciones (1) y las condiciones iniciales (1'), se llaman *estables*, según Liapunov, cuando $t \rightarrow \infty$, si para todo $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, existe $\delta > 0$ tal que para todos los valores de $t > 0$ se verificarán las desigualdades

$$\left. \begin{aligned} |\bar{x}(t) - x(t)| &< \varepsilon, \\ |\bar{y}(t) - y(t)| &< \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

si las condiciones iniciales satisfacen las desigualdades:

$$\left. \begin{aligned} |\bar{x}_0 - x_0| &< \delta, \\ |\bar{y}_0 - y_0| &< \delta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Aclaremos el significado de esta definición. De las desigualdades (2) y (3) se deduce que, si son pequeñas las variaciones de las condiciones iniciales, las soluciones correspondientes varían poco, cualesquiera que sean los valores positivos de t . Si el sistema de ecuaciones diferenciales describe cierto movimiento, entonces, siendo estables las soluciones, el carácter de movimiento varía poco cuando los cambios de las condiciones iniciales son pequeños.

Analicemos esto en el ejemplo de una ecuación de primer orden.
Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1. \quad (a)$$

Su solución general es la función

$$y = Ce^{-t} + 1. \quad (b)$$

Halleemos la solución particular que satisface a la condición inicial

$$y_{t=0} = 1. \quad (c)$$

Es evidente que esta solución, $y=1$, se obtiene cuando $C=0$ (fig. 274). Encontremos, ahora, la solución particular que satisfaga la condición inicial

$$\bar{y}_{t=0} = \bar{y}_0.$$

De la ecuación (b) halleemos el valor de C :

$$\bar{y}_0 = C + 1,$$

de donde:

$$C = \bar{y}_0 - 1.$$

Sustituyendo este valor de C en la ecuación (b), obtenemos:

$$\bar{y} = (\bar{y}_0 - 1)e^{-t} + 1.$$

Es evidente que la solución $y=1$ es estable. En efecto,

$$y - \bar{y} = [(\bar{y}_0 - 1)e^{-t} + 1] - 1 = (\bar{y}_0 - 1)e^{-t} \rightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

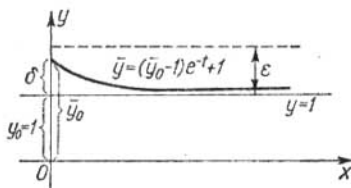


Fig. 274

Por consiguiente, la desigualdad (3) se verifica para ε cualquiera, siempre cuando se cumple la desigualdad

$$(y_0 - 1) = \delta < \varepsilon.$$

Examinemos luego el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

suponiendo que los coeficientes a, b, c, g son constantes y $g \neq 0$.

Aclaremos a qué condiciones deben satisfacer los coeficientes para que la solución $x = 0, y = 0$, del sistema (4) sea estable.

Derivando la ecuación primera y eliminando y , obtenemos una ecuación de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= c \frac{dx}{dt} + g \frac{dy}{dt} = c \frac{dx}{dt} + g(ax + by) = \\ &= c \frac{dx}{dt} + agx + b \left(\frac{dx}{dt} - cx \right) \end{aligned}$$

6

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b + c) \frac{dx}{dt} - (ag - bc)x = 0. \quad (5)$$

Su ecuación característica tiene la forma:

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ag - bc) = 0. \quad (6)$$

Designemos las raíces de la ecuación característica por λ_1 y λ_2 . Son posibles los casos siguientes.

1. Las raíces de la ecuación característica son reales, negativas y distintas:

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Entonces,

$$\bar{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = [C_1(\lambda_1 - c) e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - c) e^{\lambda_2 t}] \frac{1}{g}.$$

La solución que satisface a las condiciones iniciales

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0,$$

es:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0g}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g} \left[\frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 - c) e^{\lambda_1 t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0g}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 - c) e^{\lambda_2 t} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

De las últimas fórmulas se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede elegir x_0 e y_0 suficientemente pequeños de modo que para todos $t > 0$ tenemos:

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon, \quad \text{puesto que } e^{\lambda_1 t} < 1 \text{ y } e^{\lambda_2 t} < 1.$$

Por tanto, en este caso la solución $x = 0, y = 0$ es estable.

2. Sean $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$. En este caso:

$$x = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = \frac{1}{g} [C_2(\lambda_2 - c) e^{\lambda_2 t} - cC_1],$$

y, como en el caso anterior, la solución es estable.

3. Sea $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. En este caso:

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t},$$

$$y = \frac{1}{g} e^{\lambda_1 t} [C_1(\lambda_1 - c) + C_2(1 + \lambda_1 t - ct)].$$

Puesto que

$$te^{\lambda_1 t} \rightarrow 0, \quad e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

entonces, para C_1 y C_2 suficientemente pequeñas (es decir, cuando x_0 e y_0 son suficientemente pequeños) será:

$$|x(t)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |y(t)| < \varepsilon \quad \text{para cualquier } t > 0.$$

La solución es **estable**.

4. Sea $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. En este caso tenemos:

$$x = C_1 + C_2 t,$$

$$y = \frac{1}{g} [-cC_1 + C_2 - cC_2 t].$$

Vemos que por pequeña que sea $C_2 \neq 0$, tanto x , como y tienden al infinito (cuando $t \rightarrow \infty$), es decir, la solución es **inestable**.

5. Supongamos que por lo menos una de las raíces λ_1 y λ_2 sea positiva, por ejemplo, $\lambda_1 > 0$.

De la fórmula (7) se deduce que, por pequeños que sean x_0 e y_0 , si

$$cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2 \neq 0,$$

es decir, si $C_1 \neq 0$, entonces $|x(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Por tanto, en este caso la solución también es **inestable**.

6. Las raíces de la ecuación característica son complejas con la parte real negativa:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta \end{aligned} \right\} \alpha < 0.$$

En este caso:

$$\left. \begin{aligned} x &= Ce^{\alpha t} \sin(\beta t + \delta), \\ y &= \frac{1}{g} Ce^{\alpha t} [(\alpha - c) \sin(\beta t + \delta) + \beta \cos(\beta t + \delta)]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Es evidente que para todo $\varepsilon > 0$ se puede elegir x_0 e y_0 de tal modo que sea $|C| < \varepsilon$ y $\frac{|\alpha - c| + |\beta|}{|g|} < \varepsilon$, y, por consiguiente,

$$|x(t)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |y(t)| < \varepsilon.$$

La solución es **estable**.

7. Las raíces de la ecuación característica son números puramente imaginarios:

$$\lambda_1 = \beta t, \quad \lambda_2 = -\beta t.$$

En este caso:

$$x = C \operatorname{sen} (\beta t + \delta),$$

$$y = \frac{1}{g} C [\beta \cos (\beta t + \delta) - c \operatorname{sen} (\beta t + \delta)],$$

es decir, $x(t)$ e $y(t)$ son funciones periódicas de t . Como en el caso anterior verifiquemos que la solución es estable.

8. Las raíces de la ecuación característica son complejas con la parte real positiva ($\alpha > 0$).

De las fórmulas (8) se deduce que por pequeños que sean x_0 e y_0 (es decir, por pequeñas que sean $C \neq 0$), las magnitudes $|x(t)|$ e $|y(t)|$ pueden tomar los valores grandes cualesquiera que sean, cuando t crece, puesto que $e^{\alpha t} \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. La solución es inestable.

Para dar un criterio general de la estabilidad de la solución del sistema (4), procedamos de la manera siguiente.

Escribamos las raíces de la ecuación característica en forma de los números complejos:

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + i\lambda_1^{**}, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* + i\lambda_2^{**}$$

(si las raíces son reales, $\lambda_1^{**} = 0$ y $\lambda_2^{**} = 0$).

Representemos las raíces de la ecuación característica mediante los puntos en el plano de la variable compleja $\lambda^*\lambda^{**}$. Entonces, partiendo de los ocho casos examinados, se puede formular la condición de estabilidad de la solución del sistema (4) en la forma siguiente:

Si ninguna de las raíces λ_1, λ_2 de la ecuación característica (6) se encuentra a la derecha del eje imaginario y si por lo menos una de las raíces es distinta de cero, la solución es estable; si ambas raíces son nulas o por lo menos una de las raíces está a la derecha del eje imaginario, la solución es inestable.

Examinemos ahora el sistema más general de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

Aparte de los casos excepcionales, la solución de tal sistema no se expresa mediante las funciones elementales y las cuadraturas.

Para determinar que las soluciones de este sistema son estables o inestables, las comparan con las soluciones de un sistema lineal. Supongamos que cuando $x \rightarrow 0$ e $y \rightarrow 0$, las funciones $P(x, y)$

y $Q(x, y)$ también tienden a cero con mayor rapidez que ρ , donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; en otras palabras

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{P(x, y)}{\rho} = 0; \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{Q(x, y)}{\rho} = 0.$$

Entonces se puede demostrar que aparte de un caso excepcional, la solución del sistema (4') es estable siempre y cuando lo es la solución del sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

y es inestable siempre y cuando es inestable la solución del sistema (4). La excepción es el caso, en que ambas raíces de la ecuación característica se encuentran en el eje imaginario. Entonces es mucho más difícil resolver el problema de la estabilidad o inestabilidad de la solución del sistema (4').

A. M. Liapunov *) analizó el problema de la estabilidad de las soluciones de los sistemas de ecuaciones partiendo de las suposiciones bastante generales respecto a la forma de estas ecuaciones.

§ 32. SOLUCION APROXIMADA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN POR EL MÉTODO DE EULER

Examinemos aquí dos métodos de solución numérica de la ecuación diferencial de primer orden. En este párrafo analicemos el método de Euler.

Halleemos la solución aproximada de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

en el segmento $[x_0, b]$ que satisfaga la condición inicial: $y = y_0$ para $x = x_0$. Dividamos el segmento $[x_0, b]$ mediante los puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ en n partes iguales (aquí, $x_0 < x_1 < x_2, \dots, < x_n$). Designemos: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, por tanto,

$$h = \frac{b - x_0}{n}$$

*) A. M. Liapunov. «Problema general de la estabilidad de movimientos», 1935.

Sea $y = \varphi(x)$ cierta solución aproximada de la ecuación (1), y
 $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \varphi(x_1)$, $\dots$, $y_n = \varphi(x_n)$.

Designemos:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

En cada uno de los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ en la ecuación (1) sustituimos la derivada por la razón de diferencias finitas:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \quad (2)$$

$$\Delta y = f(x, y) \Delta x. \quad (2')$$

Cuando $x = x_0$ tenemos:

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \quad \Delta y_0 = f(x_0, y_0) \Delta x$$

ó

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0) h.$$

En esta igualdad x_0, y_0, h son conocidos. Por tanto, hallamos:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) h.$$

Cuando $x = x_1$ la ecuación (2') toma la forma:

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1) h$$

ó

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1) h, \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) h.$$

Aquí tenemos conocidos x_1, y_1, h y determinamos y_2 .

De modo análogo encontramos:

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) h,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) h,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) h.$$

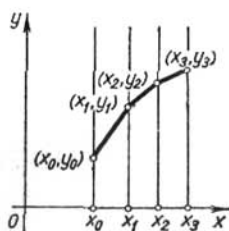


Fig. 275

Pues hemos hallado los valores aproximados de la solución en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$. Uniendo en el plano de coordenadas los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mediante los segmentos de recta obtenemos una línea quebrada que es la representación aproximada de la línea integral (fig. 275). Esta línea se llama *línea quebrada de Euler*.

Observación. Designemos por $y = \varphi_h(x)$ la solución aproximada de la ecuación (1) que corresponde a la línea quebrada de Euler

cuando $\Delta x = h$. Se puede demostrar que, si existe una solución única $y = \varphi^*(x)$ de la ecuación (1) que satisfice a las condiciones iniciales y está definida en el segmento $[x_0, b]$, entonces $\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi_h(x) - \varphi^*(x)| = 0$ para todo x del segmento $[x_0, b]$.

Ejemplo. Hallar el valor aproximado de la solución de la ecuación

$$y' = y + x,$$

para $x = 1$, que satisfaga a la condición inicial: $y_0 = 1$, cuando $x_0 = 0$.

Solución. Dividamos el segmento $[0, 1]$ en 10 partes mediante los puntos $x_0 = 0$; $0,1$; $0,2$; $\dots$; $1,0$. Por tanto, $h = 0,1$. Determinemos los valores $y_1, y_2, \dots, y_n$ por la fórmula (2'):

$$\Delta y_k = (y_k + x_k) h$$

ó

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k) h.$$

De este modo obtenemos:

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1,$$

$$y_2 = 1,1 + (1,1 + 0,1) \cdot 0,1 = 1,21,$$

.....

Durante la solución formemos la tabla:

x_k	y_k	$y_k + x_k$	$\Delta y_k = (y_k + x_k) h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0,1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0,2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0,3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0,4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0,5$	1,7164	2,2164	0,2216
$x_6 = 0,6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0,7$	2,1918	2,8918	0,2812
$x_8 = 0,8$	2,4730	3,2730	0,3273
$x_9 = 0,9$	2,8003	3,7003	0,3700
$x_{10} = 1,0$	3,1703		

Hemos encontrado el valor aproximado $y|_{x=1} = 3,1703$. La solución precisa de la ecuación dada, que satisfice las condiciones iniciales indicadas es:

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Por consiguiente,

$$y|_{x=1} = 2(e - 1) = 3,4365.$$

El error absoluto es 0,2662, el error relativo es $\frac{0,2662}{3,4365} = 0,077 \approx 8\%$.

**§ 33. SOLUCION APROXIMADA
DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES
POR EL METODO DE DIFERENCIAS,
BASADO EN EL EMPLEO DE LA FORMULA DE TAYLOR.
METODO DE ADAMS**

Busquemos de nuevo la solución de la ecuación

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

en el segmento $[x_0, b]$ que satisface a la condición inicial: $y = y_0$, cuando $x = x_0$. Introduzcamos las designaciones necesarias para lo sucesivo. Los valores aproximados de la solución en los puntos

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

serán

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Las primeras diferencias o las de primer orden son:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \dots, \quad y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Las segundas diferencias o las de segundo orden son:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Las diferencias de las segundas diferencias se llaman diferencias de tercer orden, etc. Designemos los valores aproximados de las derivadas mediante $y'_0, y'_1, \dots, y'_n$; los valores aproximados de las segundas derivadas, mediante $y''_0, y''_1, \dots, y''_n$, etc. De modo análogo determinemos las primeras diferencias de las derivadas:

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \quad \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \quad \dots, \quad \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1};$$

las segundas diferencias de las derivadas:

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0, \quad \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \quad \dots, \quad \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2}$$

etc.

Escribamos, ahora la fórmula de Taylor para solucionar la ecuación en la vecindad del punto $x = x_0$ (tomo I, cap. IV, § 6, fórmula (6)):

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \dots$$

$$\dots + \frac{(x - x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} y^{(m)}_0 + R_m. \quad (2)$$

En esta fórmula y_0 está conocido y los valores de las derivadas $y'_0, y''_0, \dots$ determinamos de la ecuación (1) del modo siguiente. Sustituyendo los valores iniciales x_0 e y_0 en el segundo miembro de la ecuación (1), hallamos y'_0 :

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Derivando los términos de la ecuación (1) respecto a x , obtenemos:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'. \quad (3)$$

Introduciendo en el segundo miembro los valores de x_0, y_0, y'_0 , hallamos:

$$y''_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x=x_0, y=y_0; y'=y'_0}.$$

Derivando una vez más la igualdad (3) respecto a x y sustituyendo los valores de x_0, y_0, y'_0, y''_0 , encontramos y'''_0 . Continuando de esta manera*), podemos hallar los valores de las derivadas de cualquier orden para $x = x_0$. En el segundo miembro de la fórmula (2) son conocidos todos los términos a excepción del término complementario R_m . De este modo, menospreciando el término complementario, podemos obtener los valores aproximados de la solución para cualquier valor de x ; la precisión de los mismos depende de la magnitud $|x - x_0|$ y del número de los términos del desarrollo.

En el método dado abajo, determinemos por la fórmula (2) sólo unos cuantos primeros valores de y , cuando $|x - x_0|$ es pequeño. Determinemos los valores de y_1 e y_2 para $x_1 = x_0 + h$ y para $x_2 = x_0 + 2h$, tomando cuatro términos del desarrollo (y_0 está conocido de las condiciones iniciales):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0, \quad (4)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0. \quad (4')$$

Consideremos, pues, que son conocidos tres valores**) de la función: y_0, y_1, y_2 . Basándonos en estos valores y utilizando la ecuación (1), determinamos:

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad y'_1 = f(x_1, y_1), \quad y'_2 = f(x_2, y_2).$$

*) En adelante supongamos que la función $f(x, y)$ es tantas veces derivable respecto a x e y , cuantas veces sea necesario en nuestros razonamientos.

**) Si tratamos de encontrar la solución con mayor exactitud, necesitamos calcular más que los primeros tres valores de y .

Conociendo y'_0, y'_1, y'_2 , podemos determinar $\Delta y'_0, \Delta y'_1, \Delta^2 y'_0$. Los resultados del cálculo anotemos en la tabla:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
x_0	y_0	y'_0		
			$\Delta y'_0$	
$x_1 = x_0 + h$	y_1	y'_1		$\Delta^2 y'_0$
			$\Delta y'_1$	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	y'_2		
...	...	...	...	...
$x_{k-2} = x_0 + (k-2)h$	y_{k-2}	y'_{k-2}		
			$\Delta y'_{k-2}$	
$x_{k-1} = x_0 + (k-1)h$	y_{k-1}	y'_{k-1}		$\Delta^2 y'_{k-2}$
			$\Delta y'_{k-1}$	
$x_k = x_0 + kh$	y_k	y'_k		

Supongamos, ahora, que conocemos los valores de la solución

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_k.$$

A base de estos valores, utilizando la ecuación (1), podemos calcular los valores de las derivadas

$$y'_0, y'_1, y'_2, \dots, y'_k,$$

y, por consiguiente,

$$\Delta y'_0, \Delta y'_1, \dots, \Delta y'_{k-1}$$

y

$$\Delta^2 y'_0, \Delta^2 y'_1, \dots, \Delta^2 y'_{k-2}.$$

Determinemos el valor de y_{k+1} por la fórmula de Taylor, haciendo

$$a = x_k, \quad x = x_{k+1} = x_k + h;$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y'''_k + \dots + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}_k + R_m.$$

Limitemos en nuestro caso con cuatro términos del desarrollo:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y'''_k. \quad (5)$$

En esta fórmula y''_k e y'''_k son desconocidos. Tratemos de hallarlos mediante las diferencias conocidas de primer y segundo órdenes.

Presentemos previamente y_{k-1} por la fórmula de Taylor, haciendo $a = x_k, \quad x - a = -h$:

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{(-h)}{1} y''_k + \frac{(-h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k, \quad (6)$$

e y'_{k-2} , haciendo $a = x_k, \quad x - a = -2h$:

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{(-2h)}{1} y''_k + \frac{(-2h)^2}{1 \cdot 2} y'''_k. \quad (7)$$

De la igualdad (6) hallamos:

$$y'_k - y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{1 \cdot 2} y'''_k. \quad (8)$$

Restando de los términos de la igualdad (6) los de la igualdad (7), obtenemos:

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k. \quad (9)$$

De las (8) y (9) hallamos:

$$\Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k,$$

ó

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-1}. \quad (10)$$

Poniendo la expresión y'''_k en la ecuación (8), tenemos:

$$y''_k = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-1}}{2h}. \quad (11)$$

Así, hemos hallado y_h'' e y_h''' . Poniendo las expresiones (10) y (11) en el desarrollo (5), obtenemos:

$$y_{h+1} = y_h + \frac{h}{1} y_h' + \frac{h}{2} \Delta y_{h-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{h-2}' \quad (12)$$

Esta es la llamada *fórmula de Adams* de cuatro términos. La fórmula (12) permite determinar y_{h+1} , conociendo y_h , y_{h-1} , y_{h-2} . Así, si conocemos y_0 , y_1 e y_2 , podemos hallar y_3 y luego y_4 , y_5 , ...

Observación 1. Indiquemos sin demostración, si existe en el segmento $[x_0, b]$ una solución única de la ecuación (1), que satisface las condiciones iniciales, el error de los valores aproximados determinados por la fórmula (12), en su valor absoluto, no supera a Mh^4 , donde M es una constante, dependiente del largo del intervalo y la forma de la función $f(x, y)$ y no dependiente de la magnitud h .

Observación 2. Si queremos obtener una precisión mayor del cálculo, debemos tomar mayor número de términos que en el desarrollo (5); entonces la fórmula (12) cambiará del modo correspondiente. Por ejemplo, si en vez de la fórmula (5) tomamos la fórmula que contiene cinco términos en el segundo miembro, es decir, si añadimos un término de orden h^4 , entonces, en lugar de la fórmula (12) obtenemos de modo semejante la que sigue

$$y_{h+1} = y_h + \frac{h}{1} y_h' + \frac{h}{2} \Delta y_{h-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{h-2}' + \frac{3h}{8} \Delta^3 y_{h-3}'$$

Aquí, y_{h+1} se determina mediante los valores y_h , y_{h-1} , y_{h-2} e y_{h-3} . Por consiguiente, para comenzar los cálculos, utilizando esta fórmula, es preciso conocer los primeros cuatro valores: y_0 , y_1 , y_2 , y_3 . Al calcular estos valores por las fórmulas de la forma (4), debemos tomar cinco primeros términos del desarrollo.

Ejemplo 1. Hallar los valores aproximados de la solución de la ecuación

$$y' = y + x,$$

que satisface la condición inicial:

$$y_0 = 1; \text{ cuando } x_0 = 0.$$

Determinar los valores de la solución para $x=0,1$; $0,2$; $0,3$; $0,4$.

Solución. Utilizando las fórmulas (4) y (4'), hallemos, al principio, y_1 e y_2 . De la ecuación y los datos iniciales obtenemos

$$y_0' = (y + x)_{x=0} = y_0 + 0 = 1 + 0 = 1.$$

Derivando la ecuación dada, tenemos:

$$y'' = y' + 1.$$

Por tanto,

$$y_0'' = (y' + 1)_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

Derivemos una vez más:

$$y''' = y''.$$

Por consiguiente,

$$y_0''' = y_0'' = 2.$$

Poniendo en la ecuación (4) los valores de y_0 , y_0' , y_0'' y $h=0,1$, obtenemos:

$$y_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,1103.$$

De modo análogo, para $h=0,2$ obtenemos:

$$y_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,2426$$

Conociendo y_0 , y_1 , y_2 a base de la ecuación, hallamos:

$$y_0' = y_0 + 0 = 1;$$

$$y_1' = y_1 + 0,1 = 1,1103 + 0,1 = 1,2103;$$

$$y_2' = y_2 + 0,2 = 1,2426 + 0,2 = 1,4426;$$

$$\Delta y_0' = 0,2103;$$

$$\Delta y_1' = 0,2323;$$

$$\Delta^2 y_0' = 0,0220.$$

Los valores obtenidos anotemos en la tabla:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1,0000$	$y_0' = 1$		
			$\Delta y_0' = 0,2103$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 1,1103$	$y_1' = 1,2103$		$\Delta^2 y_0' = 0,0220$
			$\Delta y_1' = 0,2323$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 1,2426$	$y_2' = 1,4426$		$\Delta^2 y_1' = 0,0228$
			$\Delta y_2' = 0,2551$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 1,3977$	$y_3' = 1,6977$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 1,5812$			

Según la fórmula (12) encontramos y_3 :

$$y_3 = 1,2426 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,4426 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2323 + \frac{5 \cdot (0,1)}{12} \cdot 0,0220 = 1,3977.$$

Encontremos ahora los valores de y'_3 , $\Delta y'_2$, $\Delta^2 y'_1$. Usando de nuevo la fórmula (12), hallamos y_4 :

$$y_4 = 1,3977 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,6977 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2551 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0228 = 1,5812.$$

La expresión exacta de la solución de la ecuación dada es:

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Por consiguiente, $y_{x=0,4} = 2e^{0,4} - 0,4 - 1 = 1,5836$. El error absoluto es 0,0024; el error relativo es $\frac{0,0024}{1,5836} = 0,0015 \approx 0,15\%$. (El error absoluto del valor de y_4 , calculado por el método de Euler, es 0,06; el error relativo es $0,038 \approx 3,8\%$).

Ejemplo 2. Hallar los valores aproximados de la solución de la ecuación

$$y' = y^2 + x^2,$$

que satisface a la condición inicial; $y_0 = 0$, cuando $x_0 = 0$. Determinar los valores de la solución para $x = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$.

Solución. Hallemos:

$$y'_0 = 0^2 + 0^2 = 0, \quad y''_{x=0} = (2yy' + 2x)_{x=0} = 0, \quad y'''_{x=0} = (2y'^2 + 2yy'' + 2)_{x=0} = 2.$$

Según las fórmulas (4) y (4') obtenemos:

$$y_1 = \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0003, \quad y_2 = \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0026.$$

De la ecuación encontramos:

$$y'_0 = 0, \quad y'_1 = 0,0100, \quad y'_2 = 0,0400.$$

Basándonos en estos datos, formamos los primeros renglones de la tabla, luego, utilizando la fórmula (12), determinamos los valores de y_3 e y_4 .

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y'_0 = 0$		
			$\Delta y'_0 = 0,0100$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,0003$	$y'_1 = 0,0100$		$\Delta^2 y'_0 = 0,0200$

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
			$\Delta y'_1 = 0,0300$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,0026$	$y'_2 = 0,0400$		$\Delta^2 y'_1 = 0,0201$
			$\Delta y'_2 = 0,0501$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,0089$	$y'_3 = 0,0901$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,0204$			

Así,

$$y_3 = 0,0026 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,0400 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0300 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0200 = 0,0089,$$

$$y_4 = 0,0089 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,0901 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0501 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0201 = 0,0204.$$

Notemos que las primeras cuatro cifras exactas en y_4 son: $y_4 = 0,0213$. (Este resultado podemos obtener usando otros métodos más exactos y la evaluación del error.)

§ 34. MÉTODO APROXIMADO DE INTEGRACION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Los métodos de integración aproximada de las ecuaciones diferenciales, analizados en los §§ 32 y 33, podemos aplicar también para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Examinemos aquí el método de diferencias usado para solucionar los sistemas de ecuaciones. Analicemos aquí el sistema de dos ecuaciones con dos funciones desconocidas.

Hallar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z), \quad (2)$$

que satisfagan a las condiciones iniciales $y = y_0$, $z = z_0$, cuando $x = x_0$.

Determinemos los valores de las funciones y y z para los valores del argumento: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$. Sea, de nuevo,

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x = h \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (3)$$

Designemos los valores aproximados de la función mediante

$$y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$$

y, respectivamente,

$$z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n.$$

Escribamos las fórmulas recurrentes de la forma (12) § 33:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 y'_{k-2}, \quad (4)$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{h}{1} z'_k + \frac{h}{2} \Delta z'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 z'_{k-2}. \quad (5)$$

Para utilizar estas fórmulas, es preciso saber, aparte de los y_0 y z_0 dados, también $y_1, y_2; z_1, z_2$. Estos valores hallamos por las fórmulas de la forma (4) y (4') § 32:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0,$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{1} z'_0 + \frac{h^2}{2} z''_0 + \frac{h^3}{3!} z'''_0,$$

$$z_2 = z_0 + \frac{2h}{1} z'_0 + \frac{(2h)^2}{2} z''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} z'''_0.$$

Podemos aplicar estas fórmulas, cuando conocemos $y'_0, y''_0, y'''_0, z'_0, z''_0, z'''_0$ que debemos determinar. De las ecuaciones (1) y (2) hallamos:

$$y'_0 = f_1(x_0, y_0, z_0), \quad z'_0 = f_2(x_0, y_0, z_0).$$

Derivando las ecuaciones (1) y (2) y poniendo los valores de $x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0$, hallamos:

$$y''_0 = (y'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z' \right)_{x=x_0}.$$

$$z_0'' = (z')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z' \right)_{x=x_0}.$$

Derivando una vez más hallamos y_0''' y z_0''' . Conociendo y_1, y_2, z_1, z_2 , de las ecuaciones dadas (1) y (2) encontramos:

$$y_1', y_2', z_1', z_2', \Delta y_0', \Delta^2 y_0', \Delta z_0', \Delta^2 z_0',$$

después de lo cual podemos llenar los primeros cinco renglones de la tabla:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
x_0	y_0	y_0'			z_0	z_0'		
			$\Delta y_0'$				$\Delta z_0'$	
x_1	y_1	y_1'		$\Delta^2 y_0'$	z_1	z_1'		$\Delta^2 z_0'$
			$\Delta y_1'$				$\Delta z_1'$	
x_2	y_2	y_2'		$\Delta^2 y_1'$	z_2	z_2'		$\Delta^2 z_1'$
			$\Delta y_2'$				$\Delta z_2'$	
x_3	y_3	y_3'			z_3	z_3'		

De las fórmulas (4) y (5) hallemos y_3 y z_3 y de las ecuaciones (1) y (2) encontremos y_3' y z_3' . Determinados $\Delta y_2', \Delta^2 y_1', \Delta z_2', \Delta^2 z_1'$, otra vez de las fórmulas (4) y (5) hallamos y_4 e y_5 , etc.

Ejemplo. Hallar los valores aproximados de las soluciones del sistema

$$y' = z, \quad z' = y,$$

si según las condiciones iniciales $z_0 = 1$, cuando $x = 0$ e $y_0 = 0$. Calcular los valores de las soluciones para $x = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$.

Solución. De las ecuaciones dadas encontramos:

$$y_0' = z_{x=0} = 1, \quad z_0' = y_{x=0} = 0.$$

Derivando estas ecuaciones, hallamos:

$$y_0'' = (y'')_{x=0} = (z')_{x=0} = 0,$$

$$z_0'' = (z'')_{x=0} = (y')_{x=0} = 1,$$

$$y_0''' = (y''')_{x=0} = (z'')_{x=0} = 1,$$

$$z_0''' = (z''')_{x=0} = (y'')_{x=0} = 0.$$

Utilizando las fórmulas de la forma (4) y (5), encontramos:

$$y_1 = 0 + \frac{0,1}{1} \cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 1 = 0,1002,$$

$$y_2 = 0 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 1 = 0,2016,$$

$$z_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 0 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 0 = 1,0050,$$

$$z_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 0 + \frac{(0,2)^2}{2!} \cdot 1 + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 0 = 1,0200.$$

En virtud de las ecuaciones dadas, tenemos:

$$y'_1 = 1,0050, \quad y'_2 = 1,0200,$$

$$z'_1 = 0,1002, \quad z'_2 = 0,2016,$$

$$\Delta y'_0 = 0,0050, \quad \Delta z'_0 = 0,1002,$$

$$\Delta y'_1 = 0,0150, \quad \Delta z'_1 = 0,1014,$$

$$\Delta^2 y'_0 = 0,0100, \quad \Delta^2 z'_0 = 0,0012.$$

Ahora llenemos primeros cinco renglones de la tabla:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y'_0 = 1$		
			$\Delta y'_0 = 0,0050$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,1002$	$y'_1 = 1,0050$		$\Delta^2 y'_0 = 0,0100$
			$\Delta y'_1 = 0,0150$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,2016$	$y'_2 = 1,0200$		$\Delta^2 y'_1 = 0,0109$
			$\Delta y'_2 = 0,0259$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,3049$	$y'_3 = 1,0459$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,4117$			

x	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
$x_0=0$	$z_0=1$	$z'_0=0$		
			$\Delta z'_0=0,1002$	
$x_1=0,1$	$z_1=1,0050$	$z'_1=0,1002$		$\Delta^2 z'_0=0,0012$
			$\Delta z'_1=0,1014$	
$x_2=0,2$	$z_2=1,0200$	$z'_2=0,2016$		$\Delta^2 z'_1=0,0019$
			$\Delta z'_2=0,1033$	
$x_3=0,3$	$z_3=1,0459$	$z'_3=0,3049$		
$x_4=0,4$	$z_4=1,0817$			

De las fórmulas (4) y (5), hallamos:

$$y_3 = 0,2016 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,0200 + \frac{0,1}{2!} \cdot 0,0150 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0100 = 0,3049.$$

$$z_3 = 1,0200 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,2016 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,1014 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0012 = 1,0459$$

y, análogamente:

$$y_4 = 0,3049 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,0459 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0259 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0109 = 0,4117,$$

$$z_4 = 1,0459 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,3049 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,1033 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0019 = 1,0817.$$

Es evidente que las soluciones exactas del sistema dado de las ecuaciones, que satisfacen a las condiciones iniciales, serán:

$$y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \quad z = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}).$$

Por eso, las primeras cuatro cifras exactas después de la coma de las soluciones son:

$$y_4 = \frac{1}{2} (e^{0,4} - e^{-0,4}) = 0,4107, \quad z_4 = \frac{1}{2} (e^{0,4} + e^{-0,4}) = 1,0811.$$

Observación. Puesto que las ecuaciones de órdenes superiores y los sistemas de éstas se reducen en muchos casos al sistema de ecuaciones de primer orden, el método expuesto es aplicable también a la solución de los problemas semejantes.

Ejercicios para el capítulo XIII

Demostrar que las funciones indicadas, dependientes de las constantes arbitrarias, satisfacen las ecuaciones diferenciales correspondientes:

Funciones

Ecuaciones diferenciales

$$1. y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$2. y = Cx + C - C^2.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

$$3. y^2 = 2Cx + C^2.$$

$$y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

$$4. y^2 = Cx^2 - \frac{a^2 C}{1+C}.$$

$$xy \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = (x^2 - y^2 - a^2) \frac{dy}{dx}.$$

$$5. y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3.$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{3}{x} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

$$6. y = (C_1 + C_2 x) e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2k \frac{dy}{dx} + k^2 y = e^x.$$

$$7. y = C_1 e^{a \arcsen x} + C_2 e^{-a \arcsen x}.$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0.$$

$$8. y = \frac{C_1}{x} + C_2.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Integrar las ecuaciones diferenci con varaiesiabes separables 9. $y dx - x dy = 0$. Resp. $y = Cx$. 10. $(1+u) v du + (1-v) u dv = 0$. Resp. $\ln uv + u - v = C$. 11. $(1+y) dx - (1-x) dy = 0$. Resp. $(1+y)(1-x) = C$. 12. $(t^2 - xt^2) \times \frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$. Resp. $\frac{t+x}{tx} + \ln \frac{x}{t} = C$. 13. $(y-a) dx + x^2 dy = 0$.

Resp. $(y-a) = Ce^{\frac{1}{x}}$. 14. $z dt - (t^2 - a^2) dz = 0$. Resp. $z^{2a} = C \frac{t-a}{t+a}$. 15. $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$. Resp. $x = \frac{y+C}{1-Cy}$. 16. $(1+s^2) dt - \sqrt{t} ds = 0$. Resp. $2\sqrt{t} - \arctg s = C$.

17. $\rho + \rho \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$. Resp. $\rho = C \cos \theta$. 18. $\sin \theta \cos \varphi d\theta - \cos \theta \sin \varphi d\varphi = 0$. Resp. $\cos \varphi = C \cos \theta$. 19. $sc^2 \theta \operatorname{tg} \varphi d\theta + sc^2 \varphi \operatorname{tg} \theta d\varphi = 0$. Resp. $\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \varphi = C$. 20. $sc^2 \theta \operatorname{tg} \varphi d\theta + sc^2 \varphi \operatorname{tg} \theta d\varphi = 0$. Resp. $\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi = C$. 21. $(1+x^2) dy - \sqrt{1-y^2} dx = 0$. Resp. $\arcsen y - \arctg x = C$. 22. $\sqrt{1-x^2} dy - \sqrt{1-y^2} \times dx = 0$. Resp. $y \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-y^2} = C$. 23. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1-e^x) sc^2 y dy = 0$. Resp. $\operatorname{tg} y = C(1-e^x)^3$. 24. $(x-y^2 x) dx + (y-x^2 y) dy = 0$. Resp. $x^2 + y^2 = x^2 y^2 + C$.

Problemas de la formación de ecuaciones diferenciales

25. Demostrar que la curva cuyo coeficiente angular de la tangente en cada punto es proporcional a la abscisa del punto de tangencia es una parábola. Respuesta: $y = ax^2 + C$.

26. Hallar una curva que pase por el punto $(0, -2)$, de tal modo que el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea igual a la ordenada correspondiente de este punto aumentada en tres unidades. Respuesta: $y = e^x - 3$.

27. Hallar una curva que pase por el punto (1,1) de tal manera que el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea proporcional al cuadrado de la ordenada de este punto. *Respuesta:* $k(x-1)y - y + 1 = 0$.

28. Hallar una curva para la cual el coeficiente angular de la tangente en cada punto sea n veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas. *Respuesta:* $y = Cx^n$.

29. Trazar por el punto (2,1) una curva de tal manera que la tangente en cualquier punto coincida con la dirección del radio vector construido del origen de coordenadas a este punto. *Respuesta:* $y = \frac{1}{2}x$.

30. Hallar en coordenadas polares la ecuación de una curva tal que, en cada uno de sus puntos, la tangente del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva sea igual a la magnitud inversa del radio vector, tomada con signo contrario. *Respuesta:* $r(\theta + C) = 1$.

31. Hallar en coordenadas polares la ecuación de una curva tal que, en cada uno de sus puntos, la tangente del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva sea igual al cuadrado del radio vector. *Respuesta:* $r^2 = (\theta + C)^2$.

32. Demostrar que la curva cuya propiedad consiste en que todas sus normales pasan por un punto fijo es una circunferencia.

33. Hallar una curva de tal manera que en cada uno de sus puntos la longitud de la subtangente sea igual al doble valor de la abscisa. *Respuesta:* $y = C\sqrt{x}$.

34. Hallar una curva para la cual el radio vector sea igual a la longitud de la tangente comprendida entre el punto de tangencia y el eje x .

Solución. Según la hipótesis del problema $\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, de donde: $\frac{dy}{y} = \pm \frac{dx}{x}$.

Integrando obtenemos dos familias de curvas:

$$y = Cx \text{ e } y = \frac{C}{x}.$$

35. En virtud de la ley de Newton la velocidad de enfriamiento de un cuerpo al aire libre es proporcional a la diferencia de las temperaturas entre el cuerpo y el medio ambiente.

Sea la temperatura del aire igual a 20°C ; y el cuerpo se enfría de 100°C hasta 60°C durante 20 minutos. ¿Qué tiempo se necesita para que la temperatura del cuerpo baje hasta 30°C ?

Solución. La ecuación diferencial del problema es: $\frac{dT}{dt} = k(T-20)$.

Integrando, encontramos: $T-20 = Ce^{kt}$; $T=100$ para $t=0$; $T=60$ para $t=20$; entonces, $C=80$; $40 = Ce^{20k}$, $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$, por tanto, $T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$. Haciendo $T=30$, encontramos $t=60$ min.

36. ¿Qué tiempo T se necesita para que se desagüe el embudo cónico de 10 cm de altura y ángulo al vértice $d = 60^\circ$ por un orificio de $0,5\text{ cm}^2$ en el fondo del embudo?

Solución. Calculemos mediante dos métodos diferentes el volumen del agua que se desagua entre los instantes t y $t + \Delta t$. Siendo constante la velocidad v del chorro, durante un segundo se derrama un cilindro de agua de altu-

ra v y base $0,5 \text{ cm}^2$. Durante el tiempo Δt se desagua un volumen dv de agua igual a $-dv = -0,5v dt = -0,3 \sqrt{2gh} dt^*$.

Por otra parte, a consecuencia de la salida, la altura del agua adquiere un «incremento» negativo dh , y la diferencial del volumen de agua derramada es igual a:

$$-dv = \pi r^2 dh = \frac{\pi}{3} (h+0,7)^2 dh.$$

Así,

$$\frac{\pi}{3} (h+0,7)^2 dh = -0,3 \sqrt{2gh} dt,$$

de donde

$$t = 0,0315 (10^{3/2} - h^{3/2}) + 0,0732 (10^{3/2} - h^{3/2}) + 0,078 (\sqrt{10} - \sqrt{h}).$$

Haciendo $h = 0$, obtenemos el tiempo T de derrame: $T = 12,5 \text{ seg.}$

37. La acción de la fricción sobre un disco que gira dentro de un líquido es proporcional a la velocidad angular de rotación ω . Hallar la dependencia entre la velocidad angular y el tiempo, si se conoce que la velocidad del disco baja de 100 rev/min a 60 rev/min, al pasar 1 min.

Respuesta: $\omega = 100 \left(\frac{3}{5}\right)^t \text{ rev/min.}$

38. Supongamos que la presión de una columna de aire en un nivel dado está acondicionada por la presión de las capas superiores de la atmósfera. Hallar la dependencia entre la presión y la altura, si se sabe, que al nivel del mar la presión es igual a 1 kg/cm^2 , mientras que a 500 m de altura, es $0,92 \text{ kg/cm}^2$.

Indicación: Utilicemos la ley de Boyle-Marriotte que nos dice que la densidad de un gas es proporcional a su presión. La ecuación diferencial del problema es: $dp = -k p dh$, de donde $p = e^{-0,00017h}$. *Respuesta:* $p = e^{-0,00017h}$.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

39. $(y-x) dx + (y+x) dy = 0$. *Respuesta:* $y^2 + 2xy - x^2 = C$. 40. $(x+y) dx + x dy = 0$. *Respuesta:* $x^2 + 2xy = C$. 41. $(x+y) dx + (y-x) dy = 0$. *Respuesta:*

$\ln(x^2 + y^2)^{1/2} - \arctg \frac{y}{x} = C$. 42. $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$. *Respuesta:* $1 + 2Cy - C^2x^2 = 0$. 43. $(8y + 10x) dx + (5y + 7x) dy = 0$. *Respuesta:* $(x+y)^2 \times$

$\times (2x+y)^3 = C$. 44. $(2\sqrt{st} - s) dt + t ds = 0$. *Respuesta:* $te^{\sqrt{\frac{s}{t}}} = C$ ó

$s = t \ln^2 \frac{C}{t}$. 45. $(t-s) dt + t ds = 0$. *Respuesta:* $te^{\frac{s}{t}} = C$ ó $s = t \ln \frac{C}{t}$.

46. $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$. *Respuesta:* $y = x \sqrt[3]{3 \ln Cx}$. 47. $x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) =$
 $= y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx)$. *Respuesta:* $xy \cos \frac{y}{x} = C$.

Integrar las ecuaciones diferenciales reducibles a las homogéneas:

48. $(3y - 7x + 7) dx - (3x - 7y - 3) dy = 0$. *Respuesta:* $(x+y-1)^5 (x-y-1)^2 = C$.

49. $(x+2y+1) dx - (2x+4y+3) dy = 0$. *Respuesta:* $\ln(4x+8y+5) + 8y - 4x = C$.

50. $(x+2y+1) dx - (2x-3) dy = 0$. *Respuesta:* $\ln(2x-3) - \frac{4y+5}{2x-3} = C$.

*) La velocidad v del chorro de agua a través de un orificio que se encuentra a la distancia h de una superficie libre, se da por la fórmula: $v = 0,6 \sqrt{2gh}$; donde, g es la aceleración de la fuerza de gravedad.

51. Determinar la curva cuya subnormal es la media aritmética de la abscisa y la ordenada del punto de esta curva. *Respuesta:* $(x - y)^2 (x + 2y) = C$.

52. Determinar la curva en la que la razón del segmento separado por la tangente en el eje Oy , respecto al radio vector, es una constante.

Solución. Según la hipótesis del problema $\frac{y - x \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m$, de donde:

$$\left(\frac{x}{C}\right)^m - \left(\frac{y}{x}\right)^m = \frac{2y}{x}.$$

53. Determinar la curva en la que la razón del segmento separado por la normal en el eje Ox respecto al radio vector sea una constante.

Solución. Según la hipótesis $\frac{x + y \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m$, de donde: $x^2 + y^2 = m^2 (x - C)^2$.

54. Determinar la curva en la que el segmento separado por la tangente en el eje Oy es igual a $a \operatorname{sc} \theta$, donde θ es el ángulo formado por el radio vector y el eje Ox .

Solución. Como $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$, y, según la hipótesis $y - x \frac{dy}{dx} = a \operatorname{sc} \theta$, tenemos $y - x \frac{dy}{dx} = a \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$, de donde:

$$y = \frac{x}{2} \left[e^{\frac{a}{x} + b} - e^{-\left(\frac{a}{x} + b\right)} \right].$$

55. Determinar la curva en la que el segmento separado en el eje de ordenadas por la normal trazada en algún punto de la curva es igual a la distancia entre el mismo punto y el origen de coordenadas.

Solución. El segmento separado por la normal en el eje Oy es igual a $y + \frac{x}{y'}$, y, según la hipótesis, tenemos:

$$y + \frac{x}{y'} = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ de donde } x^2 = C(2y + C).$$

56. Hallar la forma de un espejo tal que refleje paralelamente a la dirección dada todos los rayos que salen de un mismo punto 0.

Solución. Hagamos coincidir la dirección dada con el eje Ox . Sea OM el rayo incidente, MP el rayo reflejado y MQ la normal a la curva buscada:

$$\alpha = \beta; OM = OQ, NM = y,$$

$$NQ = NO + OQ = -x + \sqrt{x^2 + y^2} = y \cotg \beta = y \frac{dy}{dx},$$

de donde: $y dy = (-x \sqrt{x^2 + y^2}) dx$; integrando, tenemos: $y^2 = C^2 + 2Cx$.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

57. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$. *Respuesta:* $2y = (x+1)^4 + C(x+1)^2$

58. $y' - a \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$. *Respuesta:* $y = Cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}$.

59. $(x-x^2)y' + (2x^2-1)y - ax^3 = 0$. *Respuesta:* $y = ax + Cx\sqrt{1-x^2}$

60. $\frac{ds}{dt} \cos t + s \operatorname{sen} t = 1$ *Respuesta:* $s = \operatorname{sen} t + C \cos t$.

61. $\frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$. Respuesta: $s = \sin t - 1 + Ce^{-\sin t}$.

62. $y' - \frac{n}{x} y = e^x x^n$. Respuesta: $y = x^n (e^x + C)$.

63. $y' + \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^n}$. Respuesta: $x^n y = ax + C$.

64. $y' + y = \frac{1}{e^x}$. Respuesta: $e^x y = x + C$.

65. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0$. Respuesta: $y = x^2 \left(1 + Ce^{\frac{1}{x}} \right)$

Integrar las ecuaciones de Bernoulli:

66. $y' + xy = x^3 y^3$. Respuesta: $y^2 (x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1$. 67. $(1-x^2) y' - xy - axy^2 = 0$. Respuesta: $(C \sqrt{1-x^2} - a) y = 1$. 68. $3y^2 y' - ay^3 - x - 1 = 0$. Res-

puesta: $a^2 y^3 = Ce^{ax} - a(x+1) - 1$. 69. $y' (x^2 y^3 + xy) = 1$. Respuesta: $x \left[(2 - y^2) e^{\frac{1}{2} y^2} + C \right] = e^{\frac{1}{2} y^2}$. 70. $(y \ln x - 2) y dx = x dy$. Respuesta: $y (Cx + \ln x + 1) = 1$.

71. $y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x)$. Respuesta: $y = \frac{\operatorname{tg} x + \sec x}{\sin x + C}$.

Integrar las siguientes ecuaciones en diferenciales totales:

72. $(x^2 + y) dx + (x - 2y) dy = 0$. Resp. $\frac{x^3}{3} + yx - y^2 = C$. 73. $(y - 3x^2) dx - (4y - x) dy = 0$. Resp. $2y^2 - xy + x^3 = C$. 74. $(y^3 - x) y' = y$. Resp. $y^4 = 4xy + C$.

75. $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right] dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right] dy = 0$. Resp. $\ln \frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} = C$. 76. $2(3xy^2 + 2x^3) dx + 3(2x^2 y + y^2) dy = 0$. Resp. $x^4 + 3x^2 y^2 + y^3 = C$.

77. $\frac{x dx + (2x + y) dy}{(x + y)^2} = 0$. Resp. $\ln(x + y) - \frac{x}{x + y} = C$.

78. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx = \frac{2y dy}{x^3}$. Resp. $x^2 + y^2 = Cx^3$. 79. $\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x - y)^2} = 0$. Resp.

$\frac{xy}{x - y} = C$. 80. $x dx + y dy = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$. Resp. $x^2 + y^2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C$.

81. Hallar la curva cuya propiedad consiste en que el producto del cuadrado de la distancia, entre cualquiera de sus puntos y el origen de coordenadas, por el segmento, separado en el eje de las abscisas por la normal al punto mencionado, es igual al cubo de la abscisa de este punto. Respuesta: $y^3 (2x^2 + y^2) = C$.

82. Hallar la envolvente de las siguientes familias de curvas:

a) $y = Cx + C^2$. Resp. $x^2 + 4y = 0$. b) $y = \frac{x}{C} + C^2$. Resp. $27x^2 = 4y^3$. c) $\frac{x}{C} -$

$\frac{y}{C^3} = 2$. Resp. $27y = x^3$. d) $C^2 x + Cy - 1 = 0$. Resp. $y^2 + 4x = 0$. e) $(x - C)^3 + (y - C)^2 = C^2$. Resp. $x = 0$; $y = 0$. f) $(x - C)^2 + y^2 = 4C$. Resp. $y^2 = 4x + 4$. g) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 4$. Resp. $(x - y)^2 = 8$. h) $Cx^2 + C^2 y = 1$. Resp. $x^4 + 4y = 0$.

83. Una recta se desplaza de tal modo que la suma de los segmentos separados por ella en los ejes de coordenadas es igual a una constante a . Escribir

la ecuación de la envolvente de esta familia de rectas. *Respuesta:* $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ (parábola).

84. Hallar la envolvente de una familia de rectas tales que los ejes de coordenadas separan sobre estas rectas un segmento de longitud constante a . *Respuesta:* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

85. Hallar la envolvente de una familia de circunferencias cuyos diámetros son el doble de las ordenadas de la parábola $y^2 = 2px$. *Respuesta:* $y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right)$.

86. Hallar la envolvente de una familia de circunferencias que tienen sus centros en la parábola $y^2 = 2px$ y pasan por el vértice de esta parábola. *Respuesta:* la cisoide $x^3 + y^3 (x + 2p) = 0$.

87. Hallar la envolvente de una familia de circunferencias cuyos diámetros son cuerdas de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, perpendiculares al eje

Ox . *Respuesta:* $\frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

88. Hallar la evoluta de la elipse $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ como envolvente de sus normales. *Respuesta:* $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$.

Integrar las siguientes ecuaciones (de Lagrange):

89. $y = 2xy' + y'^2$. *Respuesta:* $x = \frac{C}{3p^2} - \frac{2}{3}p$; $y = \frac{2C - p^3}{3p}$.

90. $y = xy'^2 + y'^2$. *Respuesta:* $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$. La solución singular: $y = 0$.

91. $y = x(1 + y') + (y')^2$. *Respuesta:* $x = Ce^{-p} - 2p + 2$; $y = C(p+1)e^{-p} - p^2 + 2$.

92. $y = yy'^2 + 2xy'$. *Respuesta:* $4Cx = 4C^2 - y^2$.

93. Hallar una curva de normal constante. *Respuesta:* $(x-C)^2 + y^2 = a^2$. Solución singular: $y = \pm a$.

Integrar las ecuaciones de Clairaut:

94. $y = xy' + y' - y'^2$. *Respuesta:* $y = Cx + C - C^2$. Solución singular: $4y = (x+1)^2$.

95. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$. *Respuesta:* $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$. Solución singular: $y^2 - x^2 = 1$.

96. $y = xy' + y'$. *Respuesta:* $y = Cx + C$.

97. $y = xy' + \frac{1}{y'}$. *Respuesta:* $y = Cx + \frac{1}{C}$. Solución singular: $y^2 = 4x$.

98. $y = xy' - \frac{1}{y'^2}$. *Respuesta:* $y = Cx - \frac{1}{C^2}$. Solución singular: $y^3 = -\frac{27}{4}x^2$.

99. El área de un triángulo, formado por la tangente a una curva buscada y los ejes de coordenadas, es una magnitud constante. Hallar esta curva. *Respuesta:* la hipérbola equilátera $4xy = \pm a^2$. Además, cualquier recta de la familia $y = Cx \pm a\sqrt{C}$.

100. Hallar una curva tal que el segmento de su tangente comprendido entre los ejes de coordenadas tenga una longitud constante a . *Respuesta:* $y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$. Solución singular: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

101. Hallar una curva tal que la suma de los segmentos separados por sus tangentes en los ejes de coordenadas sea igual a $2a$. *Respuesta:* $y = Cx - \frac{2aC}{1-C}$. Solución singular: $(y-x-2a)^2 = 8ax$.

102. Hallar las curvas tales que el producto de las distancias, desde una tangente cualquiera hasta dos puntos dados, sea constante. *Respuesta:* las elipses y las hipérbolas (trayectorias ortogonales e isogonales).

103. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = ax^n$. *Respuesta:* $x^2 + ny^2 = C$.

104. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y^2 = 2p(x - \alpha)$ (α es el parámetro de la familia). *Respuesta:* $y = Ce^{-\frac{x}{p}}$.

105. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x^2 - y^2 = \alpha$ (α es el parámetro). *Respuesta:* $y = \frac{C}{x}$.

106. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$. *Respuesta:* las circunferencias $y = C(x^2 + y^2)$.

107. Hallar las trayectorias ortogonales de parábolas iguales, cuyas vértices se encuentran en una recta dada. *Respuesta:* si $2p$ es el parámetro de las parábolas y Oy es la recta dada, la ecuación de las trayectorias será $y + C =$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{p}} x^{3/2}.$$

108. Hallar las trayectorias ortogonales de las cisoides $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. *Respuesta:* $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

109. Hallar las trayectorias ortogonales de las lemniscatas $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2$. *Respuesta:* $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$.

110. Hallar las trayectorias isogonales de la familia de curvas: $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$, donde a es un parámetro variable, si el ángulo constante ω formado por las curvas de la familia y sus trayectorias es igual a 60° .

Solución. Hallamos la ecuación diferencial de la familia de curvas $y' = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$ y sustituimos y' por la expresión

$$q = \frac{y' - \operatorname{tg} \omega}{1 + y' \operatorname{tg} \omega}. \text{ Si } \omega = 60^\circ, \text{ tenemos } q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'} y$$

obtenemos la ecuación diferencial: $\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y' \sqrt{3}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$. La integral general $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$ da la familia buscada de trayectorias.

111. Hallar las trayectorias isogonales de la familia de parábolas $y^2 = 4Cx$, cuando $\omega = 45^\circ$. *Respuesta:* $y^2 - xy + 2x^2 = Ce^{\frac{6}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2y-x}{x\sqrt{7}}}$.

112. Hallar las trayectorias isogonales de la familia de rectas, $y = Cx$, cuando $\omega = 30^\circ, 45^\circ$. *Respuesta:* las espirales logarítmicas $\begin{cases} x^2 + y^2 = e^{2\sqrt{3} \arctg \frac{y}{x}}; \\ x^2 + y^2 = e^{2 \arctg \frac{y}{x}}. \end{cases}$

113. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Eliminar C_1 y C_2 . *Respuesta:* $y'' - y = 0$.

114. Escribir la ecuación diferencial de todas las circunferencias dispuestas en un mismo plano. *Respuesta:* $(1 + y'^2)y'' - 3y'y''^2 = 0$.

115. Escribir la ecuación diferencial de todas las curvas centrales de segundo orden, cuyos ejes principales coinciden con los Ox, Oy . *Respuesta:* $x(yy'' + y'^2) - y'y'' = 0$.

116. Sea la ecuación diferencial $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ y su solución general $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$.

- 1) Verificar que la familia dada de curvas es realmente la solución general;
- 2) hallar la solución particular, si para $x=0$ tenemos: $y=1$, $y'=0$,

$y'' = -1$. Respuesta: $y = \frac{1}{6} (9e^x + e^{-x} - 4e^{2x})$.

117. Sea la ecuación diferencial $y'' = \frac{1}{2y'}$ y su solución general $y = \pm \frac{2}{3} (x + C_1)^{3/2} + C_2$.

1) Verificar que la familia dada de curvas es realmente la solución general;

2) hallar la curva integral que pasa por el punto (1, 2), si la tangente en este punto forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo de 45° .

Respuesta: $y = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + \frac{4}{3}}$.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales simples de segundo orden que se reducen a las ecuaciones de primer orden.

118. $xy''' = 2$. Respuesta: $y = x^2 \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; escribir la solución particular que satisfaga las siguientes condiciones iniciales: $x=1$; $y=1$;

$y'=1$; $y''=3$. 119. $y^{(n)} = x^{(m)}$. Respuesta: $y = \frac{m! x^{m+n}}{(m+n)!} + C_1 x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n$.

120. $y'' = a^2 y$. Respuesta: $ax = \ln (ay + \sqrt{a^2 y^2 + C_1}) + C_2$ ó $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$.

121. $y'' = \frac{a}{y^3}$. Respuesta: $(C_1 x + C_2)^2 = C_1 y^2 - a$.

En los ejemplos 122-125 escribir la solución particular que satisfaga las siguientes condiciones iniciales: $x=0$, $y=-1$; $y'=0$. 122. $xy'' - y' = x^2 e^x$.

Respuesta: $y = e^x (x-1) + C_1 x^2 + C_2$. Solución particular: $y = e^x (x-1)$.

123. $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$. Respuesta: $y + C_1 \ln y = x + C_2$. Solución particular:

$y = -1$. 124. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 2x$. Respuesta: $y = C_2 + C_1 \operatorname{sen} x - x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$.

Solución particular: $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x - x - 1$. 125. $(y'')^2 + (y')^2 = a^2$.

Respuesta: $y = C_2 - a \cos (x + C_1)$. Solución particular: $y = a - 1 - a \cos x$;

$y = a \cos x - (a+1)$. (Indicación. Forma paramétrica $y'' = a \cos t$, $y' = a \operatorname{sen} t$).

126. $y'' = \frac{1}{2y'}$. Respuesta: $y = \pm \frac{2}{3} (x + C_1)^{3/2} + C_2$. 127. $y''' = y''^2$. Respuesta:

$y = (C_1 - x) [\ln (C_1 - x) - 1] + C_2 x + C_3$. 128. $y' y''' - 3y''^2 = 0$. Respuesta: $x =$

$= C_1 y^2 + C_2 y + C_3$. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes: 129. $y'' = 9y$. Respuesta: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$. 130. $y'' + y = 0$. Respuesta: $y = A \cos x + B \operatorname{sen} x$. 131. $y'' - y' = 0$. Respuesta: $y = C_1 + C_2 e^x$. 132. $y'' + 12y = 7y'$. Respuesta: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$. 133. $y'' - 4y' + 4y = 0$. Respuesta:

$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$. 134. $y'' + 2y' + 10y = 0$. Respuesta: $y = e^{-x} (A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$.

135. $y'' + 3y' - 2y = 0$. Respuesta: $y = C_1 e^{\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} x} + C_2 e^{\frac{-3 - \sqrt{17}}{2} x}$. 136. $4y'' -$

$-12y' + 9y = 0$. Respuesta: $y = (C_1 + C_2 x) e^{3/2 x}$. 137. $y'' + y' + y = 0$. Respuesta:

$y = e^{-\frac{1}{2} x} \left[A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + B \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right]$.

138. Dos cargas iguales están suspendidas al extremo de un muelle. Hallar el movimiento que adquiere una de las cargas si la otra se desata. Respuesta:

$x = a \cos \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t \right)$, donde a es el alargamiento del muelle bajo la acción de una carga en el estado de equilibrio.

139. Un punto material de masa m es atraído por cada uno de dos centros con fuerzas proporcionales a la distancia. El factor de proporcionalidad es igual a k . La distancia entre dos centros es $2c$. El punto se halla en el instante inicial en la línea que une los centros a la distancia a de su medio. La velocidad inicial es cero. Hallar la ley de movimiento del punto. Respuesta: $x =$

$$= a \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right).$$

140. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$. Resp. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$. 141. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. Resp. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$. 142. $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0$. Resp. $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2) e^{ax}$. 143. $y^V - 4y''' = 0$. Resp. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x}$. 144. $y^{IV} + 2y'' + 9y = 0$. Resp. $y = (C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) e^{-x} + (C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x) e^x$. 145. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$. Resp. $y = C_1 e^{2x} +$

$$+ C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x e^{-2x}. 146. y^{IV} + y = 0. \text{ Resp. } y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

147. $y^{IV} - a^4y = 0$. Hallar la solución general y la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales para $x_0 = 0$, $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -a^2$, $y''' = 0$.

Respuesta: solución general: $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. Solución particular: $y_0 = \cos ax$.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas (hallar la solución general):

148. $y'' - 7y' + 12y = x$. Resp. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{12x+7}{144}$. 149. $s'' - a^2s = t + 1$. Resp. $s = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} - \frac{t+1}{a^2}$.

150. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$. Resp. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} (6 \sin 2x + 2 \cos 2x)$. 151. $y'' - y = 5x + 2$. Resp. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 5x - 2$. 152. $s'' - 2as' + a^2s = e^t$ ($a \neq 1$). Resp. $s = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at} + \frac{e^t}{(a-1)^2}$.

153. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$. Resp. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{21} e^{2x}$. 154. $y'' + 9y = 6e^{3x}$. Resp. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{3} e^{3x}$.

155. $y'' - 3y' = 2 - 6x$. Resp. $y = C_1 + C_2 e^{3x} + x^2$. 156. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x$. Resp. $y = e^x (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x) + \frac{e^{-x}}{41} (5 \cos x - 4 \sin x)$. 157. $y'' + 4y = 2 \sin 2x$. Resp. $y = A \sin 2x + B \cos 2x -$

$$-\frac{x}{2} \cos 2x. 158. y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3. \text{ Resp. } y = (C_1 + C_2x) e^x + C_3 e^{2x} - x - 4.$$

159. $y^{IV} - a^4y = 5a^4 e^{ax} \sin ax$. Resp. $y = (C_1 - \sin ax) e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. 160. $y^{IV} + 2a^2y'' + a^4y = 8 \cos ax$. Resp. $y = (C_1 + C_2x) \cos ax + (C_3 + C_4x) \sin ax - \frac{x^2}{a^2} \cos ax$.

161. Hallar una curva integral de la ecuación $y'' + k^2 y = 0$, que pasa por el punto $M(x_0, y_0)$ y toca en este punto a la recta $y = ax$. Respuesta:

$$y = y_0 \cos k(x - x_0) + \frac{a}{k} \sin k(x - x_0).$$

162. Hallar la solución de la ecuación $y'' + 2hy' + n^2 y = 0$ que satisfaga las condiciones iniciales $y = a$, $y' = C$ para $x = 0$. Respuesta:

$$\text{para } h < n, y = e^{-hx} \left(a \cos \sqrt{n^2 - h^2} x + \frac{C + ah}{\sqrt{n^2 - h^2}} \sin \sqrt{n^2 - h^2} x \right);$$

$$\text{para } h = n, y = e^{-hx} [(C + ah)x + a]; \text{ para } h > n, y = \frac{C + a(h + \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} \times \\ \times e^{-(h - \sqrt{h^2 - n^2})x} - \frac{C + a(h - \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h + \sqrt{h^2 - n^2})x}.$$

163. Hallar las soluciones de la ecuación $y'' + n^2 y = h \sin px$ ($p \neq n$), que satisfagan las condiciones: $y = a$, $y' = C$ para $x = 0$. Respuesta: $y = a \cos nx + \frac{C(n^2 - p^2) - hp}{n(n^2 - p^2)} \sin nx + \frac{h}{n^2 - p^2} \sin px$.

164. Un peso de 4 kg está suspendido en un muelle, aumentando la longitud de este a 1 cm. Hallar la ley del movimiento de este peso suponiendo que el extremo superior del muelle efectúa oscilaciones armónicas según la ley $y = \sin \sqrt{100g} t$, donde y es el alargamiento por la vertical.

Solución. Sea x la coordenada vertical del peso, medida a partir de la posición de reposo, tenemos:

$$\frac{4}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - y - l),$$

donde l es la longitud del muelle en estado libre; $k = 400$, lo que se deduce fácilmente de las condiciones iniciales. De aquí:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 100gx = 100g \sin \sqrt{100g} t + 100lg.$$

Busquemos una integral particular de esta ecuación de la forma:

$$i(C_1 \cos \sqrt{100g} t + C_2 \sin \sqrt{100g} t) + g,$$

debido a que el primer término del segundo miembro de la ecuación entra en la solución de la ecuación homogénea.

165. Según la hipótesis del problema 139, la velocidad inicial es igual a v_0 y su dirección es perpendicular a la recta que une los centros. Hallar las trayectorias.

Solución. Tomando por el origen de coordenadas el punto medio del segmento entre los centros, las ecuaciones diferenciales del movimiento se escriben en la forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k(C - x) - k(C + x) = -2kx, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -2ky.$$

Las condiciones iniciales para $t = 0$ son:

$$x = a; \quad \frac{dx}{dt} = 0; \quad y = 0; \quad \frac{dy}{dt} = v_0.$$

Integrando, hallamos:

$$x = a \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right), \quad y = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right).$$

De donde: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{m v_0^2}{2k}} = 1$ (elipse).

166. Un tubo horizontal gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular ω constante. Dentro del tubo está colocada una bola que se desliza por él sin fricción. Hallar la ley del movimiento de la bola, si en el instante inicial ésta se encuentra en el eje de rotación y tiene velocidad inicial v_0 (a lo largo del tubo).

Indicación. La ecuación diferencial del movimiento es $\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 r$.

Las condiciones iniciales: $r=0$, $\frac{dr}{dt} = v_0$ para $t=0$.

Integrando, hallamos: $r = \frac{v_0}{2\omega} [e^{\omega t} + e^{-\omega t}]$.

Aplicando el método de la variación de las constantes arbitrarias, integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

167. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$. Resp. $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{5 \sin x + 7 \cos x}{74}$.

168. $y'' + y = \sec x$. Resp. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln \cos x$.

169. $y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$. Resp. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sqrt{\cos 2x}$.

Integrar los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

170. $yy'' = y'^2 + 1$. Resp. $y = \frac{1}{2C_1} [e^{C_1(x-C_2)} + e^{-C_1(x-C_2)}]$. 171. $\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x-y)^2} = 0$.

Resp. $\frac{xy}{x-y} = C$. 172. $y = xy'^2 + y'^2$ Resp. $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$. Soluciones singu-

lares: $y=0$; $x+1=0$. 173. $y'' + y = \sec x$. Resp. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln \cos x$. 174. $(1+x^2)y' - xy - a = 0$. Resp. $y = ax +$

$+ C \sqrt{1+x^2}$. 175. $x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x$. Resp. $xe^{\frac{\sin y}{x}} = C$. 176.

$y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$. Resp. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$. 177.

$xy' + y - y^2 \ln x = 0$. Resp. $(\ln x + 1 + Cx)y = 1$. 178. $(2x + 2y - 1) dx + (x + y - 2) dy = 0$. Resp. $2x + y - 3 \ln(x + y + 1) = C$. 179. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$. Resp. $\operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3$.

Integrar los siguientes sistemas de ecuaciones:

180. $\frac{dx}{dy} = y + 1$, $\frac{dy}{dt} = x + 1$. Indicar las soluciones particulares que satis-

facen a las condiciones: iniciales $x = -2$, $y = 0$, cuando $t = 0$. Respuesta: $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $x = (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t$. Solución particular: $x^* = \cos t - \sin t$, $y^* = \cos t$.

181. $\frac{dx}{dt} = x - 2y$, $\frac{dy}{dt} = x - y$. Indicar las soluciones particulares que satisfacen las condiciones iniciales: $x=1$, $y=1$, cuando $t=0$, Respuesta: $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $x = (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t$. Solución particular: $x^* = \cos t - \sin t$, $y^* = \cos t$.

$$182. \begin{cases} 4 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases} \quad \text{Respuesta: } x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t.$$

$$183. \begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = x, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = y. \end{cases} \quad \text{Respuesta: } x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t.$$

$$184. \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} = 1. \end{cases} \quad \text{Respuesta: } x = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 - \frac{1}{6} t^3 + e^t, \\ y = C_4 - (C_1 + 2C_3) t - \\ - \frac{1}{2} (C_2 - 1) t^2 - \frac{1}{3} C_3 t^3 + \frac{1}{24} t^4 - e^t$$

$$185. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - y, \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z. \end{cases} \quad \text{Respuesta: } y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}, \\ z = (C_2 - C_1 - C_2 x) e^{-2x}.$$

$$186. \begin{cases} \frac{dy}{dx} + z = 0, \\ \frac{dz}{dx} + 4y = 0. \end{cases} \quad \text{Respuesta: } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \\ z = -2(C_1 e^{2x} - C_2 e^{-2x}).$$

$$187. \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases} \quad \text{Respuesta: } y = C_1 + C_2 x + 2 \sin x, \\ z = -2C_1 - C_2(2x + 1) - \\ - 3 \sin x - 2 \cos x.$$

$$188. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases} \quad \text{Respuesta: } x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ z = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

$$189. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}. \end{cases} \quad \text{Respuesta: } z = C_2 e^{C_1 x}, \\ y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}.$$

$$190. \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{yz}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x}{y^2}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Respuesta: } \frac{z}{y} = C_1, \\ zy^2 - \frac{3}{2}x^2 = C_2. \end{array}$$

Analizar la estabilidad de la solución $x=0$, $y=0$ para los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$191. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 6y. \end{cases} \quad \text{Respuesta: Inestable.}$$

$$192. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 10y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases} \quad \text{Respuesta: Estable.}$$

$$193. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 12x + 18y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 12y. \end{cases} \quad \text{Respuesta: Inestable.}$$

194. Hallar los valores aproximados de la solución de la ecuación $y' = y^2 + x$, que satisface a la condición inicial $y=1$, cuando $x=0$. Hallar los valores de la solución para los siguientes valores de x iguales a 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Respuesta: $y_{x=0,5} = 2,114$.

195. Hallar el valor aproximado $y_{x=1,4}$ de la solución de la ecuación $y' + \frac{1}{x}y = e^x$, que satisface a las condiciones iniciales $y=1$ cuando $x=1$. Comparar el resultado obtenido con la solución exacta.

196. Hallar los valores aproximados $x_{t=1,4}$ e $y_{t=1,4}$ de las soluciones del sistema de ecuaciones $\frac{dx}{dt} = y - x$, $\frac{dy}{dt} = -x - 3y$, que satisfacen a las condiciones iniciales $y=1$, cuando $t=1$ y $x=0$. Comparar los valores obtenidos con los exactos.

INTEGRALES MULTIPLES

§ 1. INTEGRAL DOBLE

Sea en el plano Oxy un dominio cerrado*) D , limitado por una curva L .

Sea dada en el dominio D una función continua

$$z = f(x, y).$$

Dividamos el dominio D mediante curvas arbitrarias en n partes:

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \dots, \Delta s_n$$

(fig. 276) las que llamaremos dominios parciales o elementos. Para no introducir nuevos símbolos designemos por $\Delta s_1, \dots, \Delta s_n$ no sólo a los propios elementos, sino también sus áreas. En cada Δs_i (en su interior o en la frontera), elijamos un punto P_i ; entonces obtenemos n puntos:

$$P_1, P_2, \dots, P_n.$$

Sean $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ los valores de la función en los puntos elegidos; formemos la suma de productos de la forma $f(P_i)\Delta s_i$:

$$\begin{aligned} V_n &= f(P_1)\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + \dots + f(P_n)\Delta s_n = \\ &= \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta s_i, \end{aligned} \quad (1)$$

que se llama *suma integral* de la función $f(x, y)$ en el dominio D .

Si $f \geq 0$ en el dominio D , entonces cada sumando $f(P_i)\Delta s_i$ se puede representar geométicamente como el volumen de un cilindro elemental de base Δs_i y de altura $f(P_i)$.

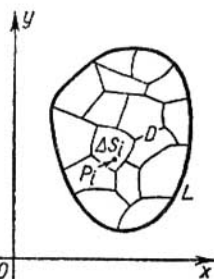


Fig. 276

*) Un dominio D se llama *cerrado*, si está limitado por una curva cerrada y se considera que los puntos, ubicados en la frontera, pertenecen al dominio D .

Así, V_n es la suma de los volúmenes de los cilindros elementales indicados, es decir, el volumen de un cierto cuerpo «escalonado» (fig. 277).

Examinemos una sucesión arbitraria de las sumas integrales, formadas con ayuda de la función $f(x, y)$ en el dominio dado D :

$$V_{n_1}, V_{n_2}, \dots, V_{n_k}, \dots \quad (2)$$

para diferentes métodos de división del dominio D en las partes Δs_i . Supongamos que el diámetro máximo de los elementos Δs_i tiende a cero, cuando $n_k \rightarrow \infty$. En este caso resulta válido el siguiente teorema que citemos aquí sin demostración.

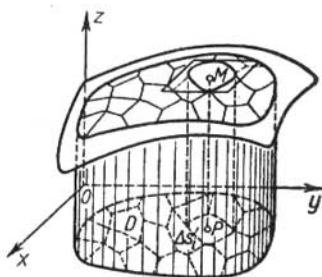


Fig. 277

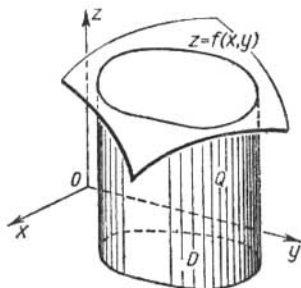


Fig. 278

Teorema 1. Siendo $f(x, y)$ una función continua en el dominio cerrado D , la sucesión (2) de las sumas integrales (1) tiene un límite, si el diámetro máximo de Δs_i tiende a cero, mientras que $n \rightarrow \infty$. Este límite siempre es el mismo para cualquier sucesión de la forma (2), es decir, no depende del modo de división del dominio en los elementos Δs_i ni de la elección del punto P_i dentro del dominio parcial Δs_i .

Este límite se llama *integral doble* de la función $f(x, y)$ extendida por el dominio D y se designa así:

$$\iint_D f(P) ds \quad \text{ó} \quad \iint_D f(x, y) dx dy,$$

es decir,

$$\lim_{\text{diám } \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Aquí D se llama *dominio de integración*.

Si es $f(x, y) \geq 0$, la integral doble de $f(x, y)$ extendida por el dominio D es igual al volumen Q de un cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje Oz y la directriz es la frontera del dominio D (fig. 278).

Examinemos ahora los siguientes teoremas acerca de la integral doble.

Teorema 2. *La integral doble de la suma de dos funciones $\varphi(x, y) + \psi(x, y)$, extendida por un dominio D es igual a la suma de las integrales dobles extendidas por este dominio D de cada una de las dos funciones por separado:*

$$\iint_D [\varphi(x, y) + \psi(x, y)] ds = \iint_D \varphi(x, y) ds + \iint_D \psi(x, y) ds.$$

Teorema 3. *El factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral doble:*

si $a = \text{const}$, tenemos:

$$\iint_D a\varphi(x, y) ds = a \iint_D \varphi(x, y) ds.$$

La demostración de estos dos teoremas se efectúa de modo análogo al que hemos practicado para demostrar teoremas correspondientes de la integral definida (véase tomo I, § 3, cap. XI).

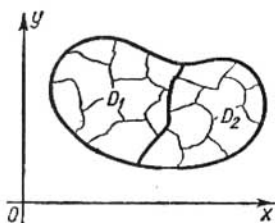


Fig. 279

Teorema 4. *Si el dominio D está dividido en dos dominios parciales D_1 y D_2 , sin poseer puntos interiores comunes, y la función $f(x, y)$ es continua en todos los puntos del dominio D , entonces:*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Demostración: La suma integral por el dominio D se puede representar en la forma (fig. 279)

$$\sum_D f(P_i) \Delta s_i = \sum_{D_1} f(P_i) \Delta s_i + \sum_{D_2} f(P_i) \Delta s_i, \quad (4)$$

donde la primera suma contiene términos correspondientes a los elementos del dominio D_1 , y la segunda, términos correspondientes a los elementos del dominio D_2 . En efecto, como la integral doble

no depende del modo de dividir el dominio D , dividámoslo de manera que la frontera común de D_1 y D_2 sea también una frontera de los elementos Δs_i . Pasando en la igualdad (4) al límite, cuando $\Delta s_i \rightarrow 0$, obtenemos la igualdad (3). Es evidente que este teorema es válida para cualquier número de sumandos.

§ 2. CALCULO DE LA INTEGRAL DOBLE

Sea un dominio D del plano Oxy tal que toda recta paralela a uno de los ejes de coordenadas (por ejemplo, al eje Oy) y que pasa por un punto interior* del dominio, corta su frontera en dos puntos N_1 y N_2 (fig. 280).

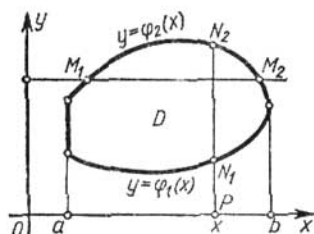


Fig. 280

Supongamos que en el caso examinado el dominio D está limitado por las curvas: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ y las rectas, $x = a$, $x = b$; que

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \quad a < b;$$

y además las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son continuas en el segmento $[a, b]$.

Convengamos llamar tal dominio *regular en la dirección del eje Oy* . De modo semejante se determina el dominio *regular en la dirección del eje Ox* .

Un dominio regular en las direcciones de ambos ejes de coordenadas llamemos simplemente *dominio regular*. La figura 280 da un ejemplo de dominio regular D .

Sea $f(x, y)$ una función continua en el dominio D .

Examinemos la expresión

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

la que llamaremos *integral iterada de segundo orden* de la función $f(x, y)$, extendida por el dominio D . En esta expresión al principio se calcula la integral entre paréntesis. La integración se realiza respecto a y , considerando x constante. Como resultado de la integración obtenemos una función continua**) de x :

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

*) El punto interior es un punto del dominio que no se encuentra en su frontera.

**) Aquí no se demuestra que la función $\Phi(x)$ es continua.

Integramos la última función respecto a x entre los límites desde a hasta b :

$$I_D = \int_a^b \Phi(x) dx.$$

En definitiva obtenemos un número constante.

Ejemplo 1. Hallar la integral iterada de segundo orden

$$I_D = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx.$$

Solución. Calculemos al principio la integral interior, (entre paréntesis):

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{x^2} = x^2 x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} = x^4 + \frac{x^6}{3}.$$

Integrando la función obtenida desde 0 hasta 1 hallamos:

$$\int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3 \cdot 7} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

Determinemos el dominio D . En el caso dado D es un dominio limitado por las líneas (fig. 281):

$$y=0, x=0, y=x^2, x=1.$$

A veces puede ocurrir que el dominio D es tal que una de las funciones $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ no puede ser dada por una sola expresi-

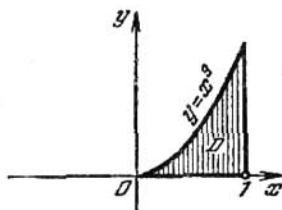


Fig. 281

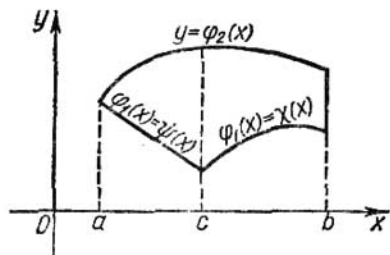


Fig. 282

sión analítica en todo el intervalo de la variación de x (desde $x = a$ hasta $x = b$). Sea, por ejemplo, $a < c < b$, y

$\varphi_1(x) = \psi(x)$ en el segmento $[a, c]$,

$\varphi_1(x) = \chi(x)$ en el segmento $[c, b]$,

donde $\psi(x)$ y $\chi(x)$ son funciones dadas analíticamente (fig. 282).

En este caso escribamos la integral iterada de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx &= \\ &= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^c \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

La primera de estas igualdades está escrita en virtud de la propiedad conocida de la integral definida y la segunda, por que en el segmento $[a, c]$ tenemos $\varphi_1(x) \equiv \psi(x)$ y en el segmento $[c, b]$, $\varphi_1(x) \equiv \chi(x)$.

Si la función $\varphi_2(x)$ es dada por diferentes expresiones analíticas en varias partes del segmento $[a, b]$, la inscripción de la integral iterada de segundo orden será análoga.

Determinemos ciertas propiedades de la integral iterada de segundo orden.

Propiedad 1. Si un dominio D regular en la dirección del eje Oy lo dividimos en dos dominios D_1 y D_2 , mediante una recta paralela al eje Oy o al eje Ox , la integral iterada de segundo orden I_D extendida por el dominio D será igual a la suma de integrales semejantes extendidas por los dominios D_1 y D_2 , es decir,

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}. \quad (1)$$

Demostración. a) Supongamos que la recta $x = c$ ($a < c < b$) divide el dominio D en dos dominios*) D_1 y D_2 regulares en la dirección del eje Oy . Entonces

$$\begin{aligned} I_D &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^c \Phi(x) dx = \int_a^c \Phi(x) dx + \int_c^b \Phi(x) dx = \\ &= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}. \end{aligned}$$

b) Supongamos que la recta $y = h$ divide el dominio D en dos dominios D_1 y D_2 regulares en dirección del eje Oy , de modo tal como se expone en la figura 283. Designemos por M_1 y M_2 los puntos de intersección de la recta $y = h$ con la frontera L de D . Designemos las abscisas de estos puntos por a_1 y b_1 .

*) El hecho de que una parte de la frontera de D_1 (también del dominio D_2) es un tramo de recta vertical no impide que este dominio sea regular en la dirección del eje Oy . En efecto, para que un dominio sea regular, es preciso sólo que cada recta vertical pasante por un punto interior de éste, tenga no más de dos puntos comunes con la frontera.

El dominio D_1 está limitado por las curvas continuas:

- 1) $y = \varphi_1(x)$;
- 2) la curva $A_1M_1M_2B$, cuya ecuación escribimos convencionalmente en la forma

$$y = \varphi_1^*(x),$$

teniendo en cuenta que $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ cuando $a \leq x \leq a_1$ y $b_1 \leq x \leq b$, y que

$$\varphi_1^*(x) = h, \text{ cuando } a_1 \leq x \leq b_1;$$

- 3) las rectas $x = a$, $x = b$.

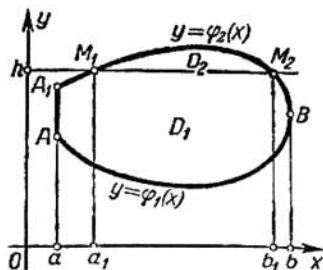


Fig. 283

El dominio D_2 está limitado por las curvas

$$y = \varphi_1^*(x), y = \varphi_2(x), \text{ donde } a_1 \leq x \leq b_1.$$

Aplicando a la integral interior el teorema sobre la descomposición del intervalo de integración, escribamos la identidad siguiente:

$$\begin{aligned} I_D &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y) dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Descompongamos la última integral en tres integrales aplicando el mismo teorema a la integral exterior:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^{a_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \\ + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_{b_1}^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx;$$

como $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ en los segmentos $[a, a_1]$ y $[b_1, b]$, las integrales primera y tercera son idénticamente iguales a cero. Por eso:

$$I_D = \int_a^{a_1} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x, y) dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Aquí la primera integral es una integral iterada de segundo orden por el dominio D_1 y la segunda, por el dominio D_2 . Por consiguiente,

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

La demostración será semejante cualquiera que sea la posición de la secante M_1M_2 . Si la recta M_1M_2 divide a D en tres o, incluso, en mayor número de dominios, obtenemos una relación, análoga a la (1) con el número correspondiente de los sumandos en el segundo miembro.

Corolario. Cada uno de los dominios obtenidos podemos dividir de nuevo en dominios regulares en la dirección del eje Oy mediante

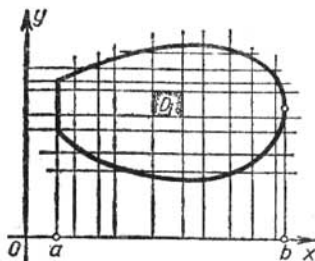


Fig. 284

una paralela a Oy o a Ox , y aplicar a éstos la igualdad (1). Por consiguiente, se puede dividir D en cualquier número de dominios regulares mediante paralelas a los ejes de coordenadas

$$D_1, D_2, D_3, \dots, D_i,$$

en este caso también será válida la afirmación de que la integral iterada de segundo orden extendida por el dominio D es igual a la suma de estas integrales extendidas por los dominios parciales, es decir (fig. 284):

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \dots + I_{D_l}. \quad (2)$$

Propiedad 2. (Evaluación de la integral iterada de segundo orden).

Sean m y M los valores mínimo y máximo de la función $f(x, y)$ en el dominio D . Designemos por S el área del dominio D . En este caso tenemos la correlación

$$mS \leq \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq MS. \quad (3)$$

Demostración. Evaluemos la integral interior, designándola por $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \leq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M dy = M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)].$$

Obtenemos:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \leq \int_a^b M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx = MS,$$

es decir

$$I_D \leq MS. \quad (3')$$

Análogamente tenemos:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \geq \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m dx = m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)],$$

$$I_D = \int_a^b \Phi(x) dx \geq \int_a^b m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx = mS,$$

es decir,

$$I_D \geq mS. \quad (3'')$$

De las desigualdades (3') y (3'') se deduce la correlación (3):

$$mS \leq I_D \leq MS.$$

En el párrafo siguiente aclaremos el significado geométrico de este teorema.

Propiedad 3 (Teorema de la media). La integral iterada de segundo orden I_D de una función continua $f(x, y)$, extendida por un dominio D del área S es igual al producto de S por el valor de la función en cierto punto P del dominio D , es decir.

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = f(P) S. \quad (4)$$

Demostración. De la correlación (3) obtenemos:

$$m \leq \frac{1}{S} I_D \leq M.$$

El número $\frac{1}{S} I_D$ está comprendido entre los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y)$ en el dominio D . En virtud de la continuidad de la función $f(x, y)$, ésta toma en cierto punto P del dominio D el valor igual a $\frac{1}{S} I_D$, es decir.

$$\frac{1}{S} I_D = f(P),$$

de donde:

$$I_D = f(P) S. \quad (5)$$

§ 3. CALCULO DE LA INTEGRAL DOBLE (CONTINUACION)

Teorema. La integral doble de una función continua $f(x, y)$, extendida por un dominio regular D , es igual a la integral iterada de segundo orden de esta función extendida por D , es decir,*)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Demostración. Dividamos el dominio D por las paralelas a los ejes de coordenadas en n dominios regulares (rectangulares):

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n.$$

En virtud de la propiedad 1 [fórmula (2)] del párrafo anterior tenemos:

$$I_D = I_{\Delta s_1} + I_{\Delta s_2} + \dots + I_{\Delta s_n} = \sum_{i=1}^n I_{\Delta s_i}. \quad (1)$$

Transformemos cada sumando del segundo miembro utilizando el teorema de la media para la integral iterada de segundo orden:

$$I_{\Delta s_i} = f(P_i) \Delta s_i.$$

Entonces, la igualdad (1) toma la forma

$$I_D = f(P_1) \Delta s_1 + f(P_2) \Delta s_2 + \dots + f(P_n) \Delta s_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i, \quad (2)$$

*) De nuevo suponemos que el dominio D es regular en la dirección del eje Oy y limitado por las curvas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$.

donde P_i es un punto en Δs_i . A la derecha tenemos una suma integral para la función $f(x, y)$ extendida por el dominio D . Del teorema sobre la existencia de la integral doble se deduce que el límite de esta suma existe y es igual a la integral doble de la función

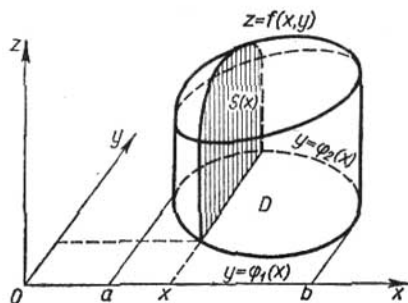


Fig. 285

$f(x, y)$ por D , cuando $n \rightarrow \infty$ y el diámetro máximo de los dominios parciales Δs_i tiende a cero.

El valor numérico de la integral iterada de segundo orden I_D del primer miembro de la igualdad (2) no depende de n . Por tanto, pasando al límite en la igualdad (2), obtenemos:

$$I_D = \lim_{\text{diám } \Delta s_i \rightarrow 0} \sum f(P_i) \Delta s_i = \iint_D f(x, y) dx dy$$

6

$$\iint_D f(x, y) dx dy = I_D. \quad (3)$$

Escribiendo la expresión de la integral iterada de segundo orden I_D en forma más detallada, en definitiva obtenemos:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (4)$$

Observación 1. Cuando $f(x, y) \geq 0$, la fórmula (4) toma una interpretación geométrica ilustrativa. Analicemos un cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas al eje Oz y la directriz sigue la frontera del dominio D (fig. 285). Calculemos el volumen V de este cuerpo. Hemos indicado ya que el volumen de este cuerpo es igual a la integral doble de la función $f(x, y)$ extendida por el dominio D :

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (5)$$

Calculemos ahora el volumen de este cuerpo utilizando los resultados del § 4, cap. XII, tomo I sobre el cálculo del volumen de un cuerpo según las áreas de secciones paralelas. Tracemos el plano secante $x = \text{const}$ ($a < x < b$), que corta el cuerpo. Calculemos el área $S(x)$ de la figura obtenida en la sección $x = \text{const}$. Esta

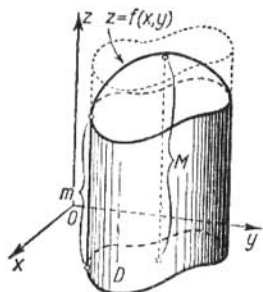


Fig. 286

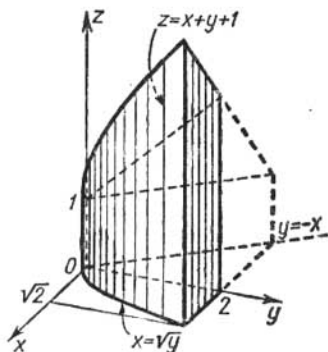


Fig. 287

figura es un trapecio curvilíneo limitado por las líneas $z = f(x, y)$ ($x = \text{const}$), $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$. Por consiguiente, esta área se expresará mediante la integral

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (6)$$

Conociendo las áreas de las secciones paralelas, es fácil hallar el volumen del cuerpo:

$$V = \int_a^b S(x) dx,$$

o, sustituyendo $S(x)$ en esta fórmula por su expresión de (6), tenemos:

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (7)$$

Los primeros miembros de las fórmulas (5) y (7) son iguales por tanto son iguales también sus segundos miembros:

$$\iiint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

No es difícil aclarar ahora el significado geométrico del teorema sobre la evaluación de la integral iterada de segundo orden (la propiedad 2 del párrafo anterior): el volumen V de un cuerpo limitado

por la superficie $z = f(x, y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica, cuya directriz sigue la frontera del dominio D es superior que el volumen de un cilindro de base S y altura m e inferior que el volumen de un cilindro de base S y altura M (m y M son los valores mínimo y máximo de la función $z = f(x, y)$ en el dominio D (fig. 286). Esto se deduce de que la integral iterada de segundo orden I_D es igual al volumen V de este cuerpo.

Ejemplo 1. Calcular la integral doble $\int_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$, si el dominio D está limitado por las rectas $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}$.

Solución. En virtud de la fórmula, tenemos:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{3/2} \left[\int_0^1 (4 - x^2 - y^2) dx \right] dy = \int_0^{3/2} \left[4x - y^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 dy = \\ &= \int_0^{3/2} \left(4 - y^2 - \frac{1}{3} \right) dy = \left(4y - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3}y \right) \Big|_0^{3/2} = \frac{35}{8}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Calcular la integral doble de la función $f(x, y) = 1 + x + y$, extendida por el dominio limitado por las líneas: $y = -x$, $x = \sqrt{y}$, $y = 2$, $z = 0$ (fig. 287).

Solución.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left[\int_{-y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y) dx \right] dy = \int_0^2 \left[x + xy + \frac{x^2}{2} \right]_{-y}^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^2 \left[\left(\sqrt{y} + y\sqrt{y} + \frac{y}{2} \right) - \left(-y - y^2 + \frac{y^2}{2} \right) \right] dy = \\ &= \int_0^2 \left[\sqrt{y} + \frac{3y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} \right] dy = \\ &= \left[\frac{2y^{3/2}}{3} + \frac{3y^2}{4} + \frac{2y^{5/2}}{5} - \frac{y^3}{6} \right]_0^2 = \frac{44}{15} \sqrt{2} + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Observación 2. Supongamos que el dominio D regular en la dirección del eje Ox está limitado por las líneas

$$x = \psi_1(y), \quad x = \psi_2(y), \quad y = c, \quad y = d,$$

siendo $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ (fig. 288).

Es evidente, que en este caso tenemos:

$$\iint_D (x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (8)$$

Para calcular una integral doble es preciso representarla en forma de una integral iterada de segundo orden. Esto se puede hacer

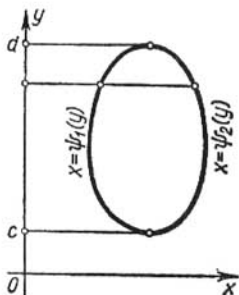


Fig. 288

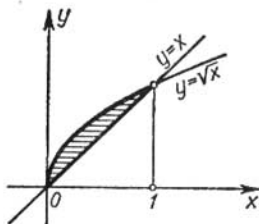


Fig. 289

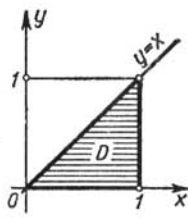


Fig. 290

por dos procedimientos, utilizando la fórmula (4) o la (8). En cada caso concreto, para calcular la integral doble elijamos una u otra fórmula según la forma del dominio D o del integrando.

Ejemplo 3. Cambiar el orden de integración en la integral

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Solución. El dominio de integración está limitado por la recta $y = x$ y la parábola $y = \sqrt{x}$ (fig. 289).

Toda paralela al eje Ox corta la frontera del dominio no más que en dos puntos. Por tanto, se puede calcular la integral según la fórmula (8) poniendo

$$\psi_1(y) = y^2, \quad \psi_2(y) = y, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

entonces:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y f(x, y) dx \right) dy.$$

Ejemplo 4. Calcular $\iint_D e^{\frac{y}{x}} ds$, si el dominio D es un triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ (fig. 290).

Solución. Sustituyamos la integral doble dada por una integral iterada de segundo orden, utilizando la fórmula (4). (Si usáramos la fórmula (8),

tendríamos que integrar la función $e^{\frac{y}{x}}$ respecto a x ; pero esta integral no se expresa mediante las funciones elementales):

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{y}{x}} ds &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx = \int_0^1 (xe^{\frac{y}{x}})_0^x dx = \\ &= \int_0^1 x(e-1) dx = (e-1) \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2} = 0,859 \dots\end{aligned}$$

Observación 3. Si el dominio D no es regular en la dirección del eje Ox , ni en la del eje Oy (es decir, si existen rectas verticales y horizontales que pasan por los puntos interiores del dominio y cortan la frontera del dominio en más dos puntos), entonces no

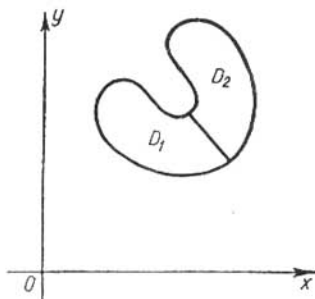


Fig. 291

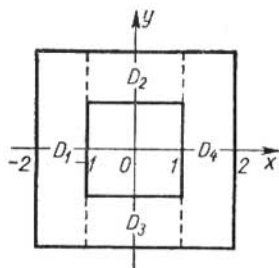


Fig. 292

podemos presentar la integral doble extendida por este dominio en la forma de una integral iterada de segundo orden. Si logramos dividir el dominio irregular D en un número finito de dominios regulares $D_1, D_2, \dots, D_n$ en dirección del eje Ox ó Oy entonces, al calcular la integral doble por cada uno de estos dominios parciales (con ayuda de la integral iterada de segundo orden) y al sumar los resultados, obtenemos la integral buscada extendida por el dominio D .

En la figura 291 se muestra el modo de dividir el dominio irregular D en dos dominios regulares D_1 y D_2 .

Ejemplo 5. Calcular la integral doble

$$\iint_D e^{x+y} ds$$

extendida por el dominio D , encerrado entre dos cuadrados con el centro en el origen de coordenadas y los lados paralelos a los ejes de coordenadas, si cada lado del cuadrado interior es igual a 2 y el del exterior a 4 (fig. 292).

Solución. El dominio D es irregular. Sin embargo, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ lo dividen en cuatro dominios regulares D_1, D_2, D_3, D_4 . Por eso:

$$\iint_D e^{x+y} ds = \iint_{D_1} e^{x+y} ds + \iint_{D_2} e^{x+y} ds + \iint_{D_3} e^{x+y} ds + \iint_{D_4} e^{x+y} ds.$$

Representando cada una de estas integrales en forma de una integral iterada de segundo orden, hallamos:

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y} ds &= \int_{-2}^{-1} \left(\int_{-2}^2 e^{x+y} dy \right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_1^2 e^{x+y} dy \right) dx + \\ &\quad + \int_{-1}^1 \left(\int_{-2}^{-1} e^{x+y} dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{-2}^2 e^{x+y} dy \right) dx = \\ &= (e^2 - e^{-2}) (e^{-1} - e^{-2}) + (e^2 - e) (e - e^{-1}) + (e^{-1} - e^{-2}) (e - e^{-1}) + \\ &\quad + (e^2 - e^{-2}) (e^2 - e) = (e^3 - e^{-3}) (e - e^{-1}) = 4 \sinh 3 \sinh 1. \end{aligned}$$

Observación 4. En adelante escribamos la integral iterada de segundo orden

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

omitiendo los paréntesis de la integral interior, es decir, en la forma:

$$I_D = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Aquí, (igual que en el caso, en que se ponen los paréntesis) convenimos que la primera integración se realiza respecto a la variable, cuya diferencial está escrita primera y después, respecto a la otra variable, cuya diferencial está escrita en el segundo lugar. Notemos, sin embargo, que esta regla no está generalmente aceptada. En algunas obras está adoptado el procedimiento contrario: al principio, la integración se realiza respecto a la variable, cuya diferencial ocupa el último lugar*).

§ 4. CALCULO DE AREAS Y VOLUMENES CON AYUDA DE INTEGRALES DOBLES

1. Volumen. Como hemos visto en § 1, el volumen V de un cuerpo, limitado por una superficie $z = f(x, y)$, donde $f(x, y)$ es una función no negativa, el plano $z = 0$ y la superficie cilíndrica,

*) A veces se utiliza también la anotación siguiente:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy.$$

cuyas generatrices son paralelas al eje Oz , y la directriz sigue la frontera del dominio D , es igual a la integral doble de la función $f(x, y)$ extendida por D :

$$V = \iint_D f(x, y) ds.$$

Ejemplo 1. Calcular el volumen de un cuerpo limitado por las superficies $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$, $z=0$ (fig. 293).

Solución.

$$V = \iint_D (1-x-y) dy dx,$$

donde D (rayado en la figura 293) es el dominio en forma triangular del plano Oxy limitado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

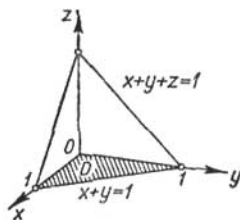


Fig. 293

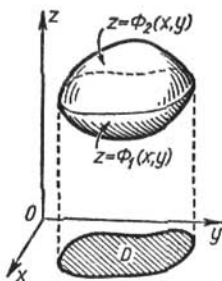


Fig. 294

Poniendo los límites en la integral doble, calculemos el volumen:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Así, $V = \frac{1}{6}$ unidades cúbicas.

Observación 1. Si el cuerpo, cuyo volumen se busca, está limitado por arriba y por debajo por las superficies $z = \Phi_2(x, y) \geq 0$ y $z = \Phi_1(x, y) \geq 0$, respectivamente, siendo D la proyección de ambas superficies sobre el plano Oxy , entonces, el volumen V de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de dos cuerpos «cilíndricos», el primero de los cuales tiene D como base inferior y la superficie $z = \Phi_2(x, y)$, como base superior, y el segundo tiene D también como base inferior y la superficie $z = \Phi_1(x, y)$, como base superior (fig. 294).

Por eso, el volumen V es igual a la diferencia de dos integrales dobles:

$$V = \iint_D \Phi_2(x, y) \, ds - \iint_D \Phi_1(x, y) \, ds,$$

ó

$$V = \iint_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)] \, ds. \quad (1)$$

Es fácil demostrar que la fórmula (1) es válida no sólo cuando $\Phi_1(x, y)$ y $\Phi_2(x, y)$ son funciones no negativas, sino también, cuando $\Phi_1(x, y)$ y $\Phi_2(x, y)$ son funciones continuas arbitrarias que satisfacen la correlación:

$$\Phi_2(x, y) \geq \Phi_1(x, y).$$

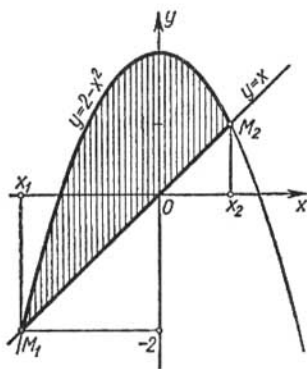


Fig. 295

Observación 2. Si la función $f(x, y)$ cambia de signo en el dominio D , divide nos a éste en dos dominios: 1) dominio D_1 , donde $f(x, y) \geq 0$; 2) dominio D_2 , donde $f(x, y) \leq 0$. Supongamos que D_1 y D_2 son tales que por estos dominios existen las integrales dobles. En este caso la integral por el dominio D_1 será positiva e igual al volumen del cuerpo dispuesto por encima del plano Oxy . La integral extendida por D_2 será negativa

e igual por su valor absoluto al volumen del cuerpo dispuesto por debajo del plano Oxy . Por consiguiente, la integral extendida por el dominio D expresará la diferencia de los volúmenes correspondientes.

2. Cálculo del área de un dominio plano. Si formamos una suma integral para la función $f(x, y) \equiv 1$ por el dominio D , obtenemos el área

$$S = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta s_i,$$

cualquiera que sea la división. Pasando al límite en el segundo miembro de la igualdad, obtenemos:

$$S = \iint_D dx \, dy.$$

Si el dominio D es regular (véase, por ejemplo, fig. 280), el área S se expresará mediante la integral iterada de segundo orden

$$S = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx.$$

Después de la integración de la integral entre paréntesis, tenemos:

$$S = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx.$$

(véase § 1, cap. XII, tomo I).

Ejemplo 2. Calcular el área de un dominio limitado por las curvas

$$y = 2 - x^2, \quad y = x.$$

Solución. Determinemos los puntos de intersección de las curvas dadas (fig. 295). Las ordenadas de dos curvas son iguales en el punto de intersección, es decir,

$$x = 2 - x^2,$$

de donde: $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Hemos obtenido dos puntos de intersección:

$$M_1(-2, -2), \quad M_2(1, 1).$$

Por tanto, el área buscada es:

$$S = \int_{-2}^1 \left(\int_x^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{27}{6}.$$

§ 5. INTEGRAL DOBLE EN COORDENADAS POLARES

Sea dado en el sistema de coordenadas polares θ, ρ , un dominio D tal, que todo rayo*) pasante por un punto interior de D corta la frontera del dominio no más que en dos puntos. Supongamos también que el dominio D está limitado por las curvas $\rho = \Phi_1(\theta)$, $\rho = \Phi_2(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$, y $\theta = \beta$, siendo $\Phi_1(\theta) \leq \Phi_2(\theta)$ y $\alpha < \beta$ (fig. 296). Diremos que un dominio tal es *regular*.

Sea dada en el dominio D una función continua de las coordenadas θ y ρ :

$$z = F(\theta, \rho).$$

Dividamos arbitrariamente D en los dominios parciales $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$.

Formemos la suma integral:

$$V_n = \sum_{k=1}^n F(P_k) \Delta s_k, \quad (1)$$

donde P_k es un punto en Δs_k .

Del teorema sobre la existencia de la integral doble se deduce que cuando el diámetro máximo de Δs_k tiende a cero, la suma inte-

*) Llamemos *rayo* a toda semirrecta que parte del origen de coordenadas, es decir, del polo P .

gral (1) tiene un límite V . Según la definición, este límite V es la integral doble de la función $F(\theta, \rho)$ extendida por el dominio D :

$$V = \iint_D F(\theta, \rho) ds. \quad (2)$$

Calculemos aquí esta integral doble.

Como el límite de la suma integral no depende del modo de dividir D en los dominios parciales Δs_k , podemos dividirlo, para la comodidad, mediante rayos $\theta = \theta_0, \theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \dots, \theta = \theta_n$ (donde $\theta_0 = \alpha, \theta_n = \beta, \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$) y las circunferencias concéntricas $\rho = \rho_0, \rho = \rho_1, \dots, \rho = \rho_m$, [donde ρ_0 es igual al valor mínimo de la función $\Phi_1(\theta)$ y ρ_m , al valor máximo de $\Phi_2(\theta)$ en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$; $\rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_m$].

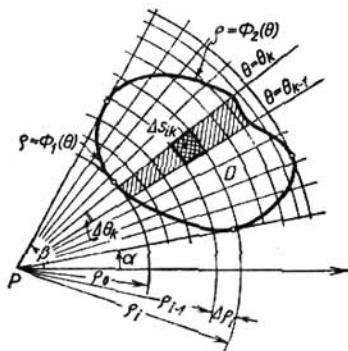


Fig. 296

Designemos por Δs_{ik} el dominio parcial limitado por las líneas $\rho = \rho_{i-1}, \rho = \rho_i, \theta = \theta_{k-1}, \theta = \theta_k$.

Sean aquí tres tipos de los dominios parciales Δs_{ik} : 1) los que no se cortan por la frontera y se sitúan dentro del dominio D ; 2) los que no se cortan por la frontera y se sitúan fuera del dominio D ; 3) los que se cortan por la frontera del dominio D .

La suma de los términos, correspondientes a los dominios parciales cortados, tiene por límite cero, cuando $\Delta \theta_k \rightarrow 0$ y $\Delta \rho_i \rightarrow 0$, por lo que estos sumandos no se toman en cuenta. Los dominios parciales Δs_{ik} que se encuentran fuera de D y no entran en la suma integral no nos interesan. Por consiguiente, se puede escribir la suma integral en la forma:

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left[\sum_i F(P_{ik}) \Delta s_{ik} \right],$$

donde P_{ik} es un punto arbitrario de Δs_{ik} .

El signo de suma doble significa aquí, que al principio sumamos por el índice i , considerando k constante (es decir, sumamos todos los términos que corresponden a los dominios parciales comprendidos entre dos rayos vecinos*). El signo de suma externo significa

*) Observemos que al sumar por el índice i , éste no tomará obligatoriamente todos los valores de 1 a m , puesto que no todos los dominios parciales situados entre los rayos $\theta = \theta_k$ y $\theta = \theta_{k+1}$ pertenecen a D .

que nosotros unimos todas las sumas obtenidas durante la primera adición (es decir, sumamos por el índice k).

Halleemos la expresión del área del dominio parcial Δs_{ik} , que no se corta por la frontera de D . El área es igual a la diferencia de las áreas de dos sectores:

$$\Delta s_{ik} = \frac{1}{2} (\rho_i + \Delta \rho_i)^2 \Delta \theta_k - \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta \theta_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta \rho_i}{2} \right) \Delta \rho_i \Delta \theta_k$$

6

$$\Delta s_{ik} = \rho_i^* \Delta \rho_i \Delta \theta_k, \text{ donde } \rho_i < \rho_i^* < \rho_i + \Delta \rho_i.$$

Así, la suma integral tiene la forma*)

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*) \rho_i^* \Delta \rho_i \Delta \theta_k \right],$$

donde $P(\theta_k^*, \rho_i^*)$ es un punto de Δs_{ik} . Saquemos el factor $\Delta \theta_k$ fuera del signo de la suma interior (esto se permite, puesto que es un factor común para todos los términos de esta suma):

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*) \rho_i^* \Delta \rho_i \right] \Delta \theta_k.$$

Supongamos que $\Delta \rho_i \rightarrow 0$ y $\Delta \theta_k$ queda constante. En este caso, la expresión entre paréntesis tenderá a la integral

$$\int_{\Phi_1(\theta_k^*)}^{\Phi_2(\theta_k^*)} F(\theta_k^*, \rho) \rho \, d\rho.$$

Suponiendo ahora que $\Delta \theta_k \rightarrow 0$, en definitiva, obtenemos**):

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho) \rho \, d\rho \right) d\theta. \quad (3)$$

*) Podemos analizar la suma integral en esta forma, puesto que el límite de la suma no depende de la posición del punto dentro del dominio parcial.

**) Nuestra deducción de la fórmula (3) no es rigurosa, al obtenerla, al principio, hemos tendido $\Delta \rho_i$ a cero, conservando $\Delta \theta_k$ invariable y sólo después hemos tendido $\Delta \theta_k$ a cero. Esto no corresponde completamente a la definición de integral doble la que consideramos como el límite de una suma integral, cuando los diámetros máximos de los dominios parciales tienden a cero (es decir, cuando $\Delta \theta_k$ y $\Delta \rho_i$ tienden simultáneamente a cero). Sin embargo, a pesar de la falta de rigurosidad en la demostración, el resultado es justo (es decir, la fórmula (3) es válida). La demostración rigurosa podría ser efectuada mediante el método utilizado para el examen de la integral doble en las coordenadas rectangulares. Notemos, que esta fórmula será deducida también en § 6, partiendo de otras consideraciones (como caso particular de la fórmula más general para transformar las coordenadas dentro de la integral doble).

La fórmula (3) sirve para calcular integrales dobles en las coordenadas polares.

Si la primera integración se realiza por θ , y la segunda, por ρ , obtenemos la fórmula (fig. 297):

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)} F(\theta, \rho) d\theta \right) \rho d\rho. \quad (3)$$

Supongamos que es preciso calcular la integral doble de la función $f(x, y)$, dada en coordenadas rectangulares y extendida por el dominio D :

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Si D es un dominio regular en coordenadas polares θ, ρ , el cálculo de la integral dada se puede reducir a la determinación de una inte-

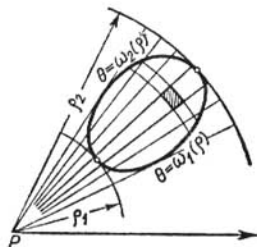


Fig. 297

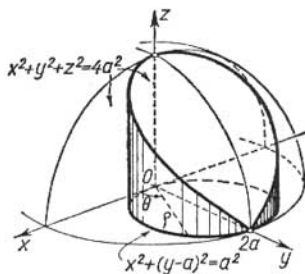


Fig. 298

gral iterada de segundo orden en coordenadas polares.

En efecto, puesto que

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, & y &= \rho \sin \theta, \\ f(x, y) &= f[\rho \cos \theta, \rho \sin \theta] = F(\theta, \rho), \end{aligned}$$

por tanto, tenemos

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f[\rho \cos \theta, \rho \sin \theta] \rho d\rho \right) d\theta. \quad (4)$$

Ejemplo 1. Calcular el volumen V del cuerpo limitado por la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

y el cilindro

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

Solución. Como el dominio de integración se puede tomar, en este ejemplo, la base de un cilindro $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, es decir, un círculo de radio a y centro en el punto $(0, a)$. La ecuación de este círculo se puede escribir en la forma: $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ (fig. 298). Calculemos la cuarta parte del volumen

V , es decir, la parte dispuesta en el primer octante. Entonces, en calidad del dominio de integración debemos tomar un semicírculo, cuyas fronteras son determinadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x &= \varphi_1(y) = 0, & x &= \varphi_2(y) = \sqrt{2ay - y^2}, \\y &= 0, & y &= 2a.\end{aligned}$$

El integrando es

$$z = f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{4} V = \int_0^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx \right) dy.$$

Transformemos la integral obtenida para las coordenadas polares θ, ρ :

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Determinemos los límites de integración. Para esto escribamos la ecuación de circunferencia dada en coordenadas polares: puesto que

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \rho^2, \\y &= \rho \sin \theta,\end{aligned}$$

tenemos:

$$\rho^2 - 2a\rho \sin \theta = 0$$

ó

$$\rho = 2a \sin \theta.$$

Por consiguiente, las fronteras del dominio en coordenadas polares (fig. 299) se determinan por las ecuaciones:

$$\rho = \Phi_1(\theta) = 0, \quad \rho = \Phi_2(\theta) = 2a \sin \theta, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2},$$

el integrando tiene la forma

$$F(\theta, \rho) = \sqrt{4a^2 - \rho^2}.$$

Por consiguiente, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{V}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \sin \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{(4a^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{2a \sin \theta} d\theta = \\&= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(4a^2 - 4a^2 \sin^2 \theta)^{3/2} - (4a^2)^{3/2}] d\theta = \\&= -\frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \frac{4}{9} a^3 (3\pi - 4).\end{aligned}$$

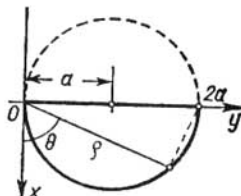


Fig. 299

Ejemplo 2. Calcular la integral de Poisson:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Solución: Calculemos al principio la integral $I_R = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, donde el dominio de integración D es un círculo

$$x^2 + y^2 = R^2$$

(fig. 300).

Pasando a las coordenadas polares θ, ρ , tenemos:

$$I_R = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \Big|_0^R d\theta = \pi (1 - e^{-R^2}).$$

Si hacemos que el radio R tienda al infinito (es decir, si ampliamos indefinidamente el dominio de integración), obtenemos la así llamada inte-

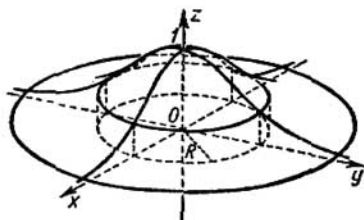


Fig. 300

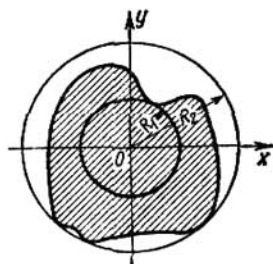


Fig. 301

gral múltiple impropia:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi (1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

Demostremos, que la integral $\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy$ tiende al límite π , cuando el dominio D' de forma arbitraria se amplía de modo tal, que todo punto del plano se encuentre, por fin, en D' y permanezca en él (anotemos convencionalmente esta ampliación del dominio D' por la correlación $D' \rightarrow \infty$).

Sean R_1 y R_2 las distancias mínima y máxima de la frontera del dominio D' a partir del origen de coordenadas (fig. 301).

Como la función $e^{-x^2-y^2} > 0$ por dondequiera, las desigualdades

$$I_{R_1} \leq \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq I_{R_2}$$

ó

$$\pi (1 - e^{-R_1^2}) \leq \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \pi (1 - e^{-R_2^2})$$

son válidas.

Como $D' \rightarrow \infty$, es evidente que $R_1 \rightarrow \infty$ y $R_2 \rightarrow \infty$ y los miembros extremos de la desigualdad tienden a un mismo límite π . Por consiguiente, a este límite tiende también el miembro medio, es decir,

$$\lim_{D' \rightarrow \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi. \quad (5)$$

Supongamos, en particular, que el dominio D' es un cuadrado de lado igual a $2a$ y centro en el origen de coordenadas; entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \\ &= \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Saquemos ahora el factor e^{-y^2} fuera del signo de la integral interior (podemos hacerlo, puesto que e^{-y^2} no depende de la variable de integración x). Entonces

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-a}^a e^{-y^2} \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right) dy.$$

Pongamos $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx = B_a$. Este es un número constante (dependiente sólo de a); por esto

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-a}^a e^{-y^2} B_a dy = B_a \int_{-a}^a e^{-y^2} dy.$$

Pero, la última integral es también igual a B_a (puesto que $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx = \int_{-a}^a e^{-y^2} dy$); por consiguiente,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = B_a B_a = B_a^2.$$

Pasemos en esta ecuación al límite, haciendo que a tienda al infinito (en este caso D' se amplía indefinidamente):

$$\lim_{D' \rightarrow \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{a \rightarrow \infty} B_a^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2.$$

Pero, según lo demostrado (véase (5)),

$$\lim_{D' \rightarrow \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

Por tanto:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \pi$$

ó

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Esta integral se encuentra a menudo en la teoría de probabilidades y en la estadística. Notemos, que es imposible calcular esta integral directamente (con ayuda de la integral indefinida), puesto que la primitiva de e^{-x^2} no se expresa mediante las funciones elementales.

§ 6. SUSTITUCION DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL DOBLE (CASO GENERAL)

Sea dado en el plano Oxy un dominio D limitado por la curva L . Supongamos también que las coordenadas x e y son las funciones de las nuevas variables u y v :

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (1)$$

donde las funciones $\varphi(u, v)$ y $\psi(u, v)$ son uniformes, continuas

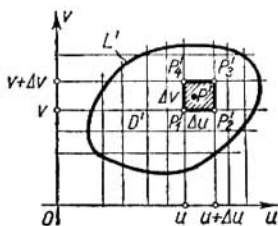


Fig. 302

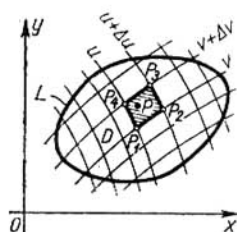


Fig. 303

y tienen las derivadas continuas en cierto dominio D' que será definido abajo. En este caso, según la fórmula (1), a cada par de valores u y v corresponde un solo par de valores x e y . Supongamos, ahora, que las funciones φ y ψ son tales que, si damos a x e y los valores determinados en el dominio D , entonces, según las fórmulas (1) determinemos los valores definidos de u y v .

Analicemos el sistema de coordenadas rectangulares Ouv (fig. 302). De lo expuesto arriba se deduce, que a todo punto $P(x, y)$ en el plano Oxy (fig. 303) corresponde uniformemente un punto $P'(u, v)$ del plano Ouv de coordenadas u, v definidas por las fórmulas (1). Los números u y v se llaman coordenadas *curvilíneas* del punto P .

Si un punto describe en el plano Oxy la curva cerrada L que limita el dominio D , entonces en el plano Ouv el punto correspondiente describirá una curva cerrada L' que limita un cierto dominio D' ; además, a cada punto de D' le corresponde un punto de D .

Por consiguiente, las fórmulas (1) establecen una *correspondencia biunívoca entre los puntos de los dominios D y D' , o, como se dice también, representan biunívocamente a D en D' .*

Analícemos en D' una recta $u = \text{const}$. En general, por las fórmulas (1) hallemos que en el plano Oxy le corresponde una cierta curva. Del modo igual a toda recta $v = \text{const}$ del plano Ouv le corresponde una cierta curva en el plano Oxy .

Mediante rectas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ dividamos el dominio D' en los dominios parciales rectangulares (no tomamos en consideración los rectángulos que tocan la frontera de D'). Las curvas correspondientes dividen el dominio D en ciertos cuadriláteros curvilíneos (fig. 303).

Analícemos en el plano Ouv un rectángulo $\Delta s'$, limitado por las rectas $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $v + \Delta v = \text{const}$ y el cuadrilátero curvilíneo Δs que le corresponde en el plano Oxy . Las áreas de estos dominios parciales designémoslas por $\Delta s'$ y Δs , respectivamente. Es evidente, que:

$$\Delta s' = \Delta u \Delta v.$$

Hablando en general, las áreas Δs y $\Delta s'$ son diferentes.

Sea dada una función continua

$$z = f(x, y)$$

en un dominio D .

A todo valor de la función $z = f(x, y)$ del dominio D , corresponde un mismo valor de la función $z = F(u, v)$ en D' , donde

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Examinemos las sumas integrales de la función z extendidas por el dominio D . Evidentemente, se verifica la igualdad siguiente:

$$\Sigma f(x, y) \Delta s = \Sigma F(u, v) \Delta s. \quad (2)$$

Calculemos Δs , es decir, el área del cuadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$ en el plano Oxy (véase fig. 303).

Determinemos las coordenadas de sus vértices:

$$\left. \begin{array}{ll} P_1(x_1, y_1), x_1 = \varphi(u, v), & y_1 = \psi(u, v), \\ P_2(x_2, y_2), x_2 = \varphi(u + \Delta u, v), & y_2 = \psi(u + \Delta u, v), \\ P_3(x_3, y_3), x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), & y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v), \\ P_4(x_4, y_4), x_4 = \varphi(u, v + \Delta v), & y_4 = \psi(u, v + \Delta v). \end{array} \right\} \quad (3)$$

Al calcular el área del cuadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$, consideremos que las líneas P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 , P_4P_1 son, por pares, rectas paralelas; además, sustituyamos los incrementos de las funciones por sus diferenciales correspondientes. De este modo, menos-

preciemos las infinitesimales de orden superior en comparación con las Δu , Δv . En este caso, las fórmulas (3) toman la forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \varphi(u, v), & y_1 &= \psi(u, v), \\ x_2 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u, & y_2 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u, \\ x_3 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, & y_3 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v, \\ x_4 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, & y_4 &= \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v. \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

Hechas las suposiciones mencionadas, podemos considerar el cuadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$ como un paralelogramo. Su área Δs es aproximadamente igual al área duplicada del triángulo $P_1P_2P_3$, y se determina mediante la aplicación de la fórmula correspondiente de la geometría analítica:

$$\begin{aligned} \Delta s &\approx |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)| = \\ &= \left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v \right) \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \right) \right| = \\ &= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta u \Delta v - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \Delta v \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v = \\ &= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\| \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

Las líneas verticales secundarias exteriores de la determinante significan que ésta se toma por su valor absoluto. Introduzcamos la designación:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{array} \right| = I.$$

Por consiguiente,

$$\Delta s \approx |I| \Delta s'. \quad (4)$$

La determinante I se llama *determinante funcional* o *jacobiano* (por el nombre del matemático alemán Jacobi) de las funciones $\varphi(u, v)$ y $\psi(u, v)$.

La igualdad (4) es sólo aproximada, puesto que, al calcular el área de Δs , hemos menospreciado las infinitesimales de orden superior. Sin embargo, cuanto menores son las dimensiones de los domi-

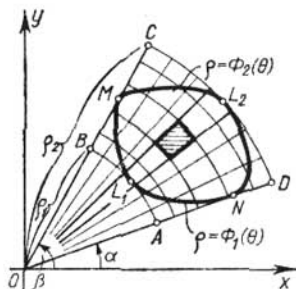


Fig. 304

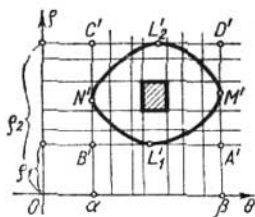


Fig. 305

nios parciales Δs y $\Delta s'$, tanto más precisa será la igualdad. Pasando al límite, la igualdad comienza a ser precisa, cuando los diámetros de los dominios parciales Δs y $\Delta s'$ tienden a cero:

$$|I| = \lim_{\text{diám } \Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}.$$

Apliquemos ahora la igualdad obtenida al cálculo de la integral doble. En virtud de la igualdad (2), podemos escribir:

$$\sum f(x, y) \Delta s \approx \sum F(u, v) |I| \Delta s'$$

(la suma integral del segundo miembro se extiende por el dominio D'). Pasando al límite, cuando $\text{diám } \Delta s' \rightarrow 0$, obtenemos la igualdad exacta:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} F(u, v) |I| du dv. \quad (5)$$

Esta es la *fórmula de transformación de las coordenadas dentro de la integral doble*. Ella permite reducir el cálculo de una integral doble extendida por el dominio D al cálculo de una integral doble extendida por el dominio D' , lo que puede simplificar el problema.

La primera demostración rigurosa de esta fórmula pertenece al distinguido matemático ruso M. V. Ostrogradski.

Observación. El paso de las coordenadas rectangulares a las polares, examinado en el párrafo anterior, es un caso particular

del cambio de variables en una integral doble. Aquí tenemos $u = \theta$, $v = \rho$:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

El arco AB ($\rho = \rho_1$) del plano Oxy (fig. 304) está representado por la recta $A'B'$ en el plano $O\theta\rho$ (fig. 305); el arco DC ($\rho = \rho_2$) del plano Oxy , por la recta $D'C'$ en el plano $O\theta\rho$.

Las rectas AD y BC del plano Oxy están representadas por las rectas $A'D'$ y $B'C'$ en el plano $O\theta\rho$. Las curvas L_1 y L_2 se representan por las curvas L'_1 y L'_2 .

Calculemos el jacobiano de la transformación de las coordenadas cartesianas x e y en las polares θ y ρ :

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho \sin^2 \theta - \rho \cos^2 \theta = -\rho.$$

Por consiguiente, $|I| = \rho$, entonces

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho) \rho d\rho \right) d\theta.$$

Esta es la fórmula obtenida en el párrafo anterior.

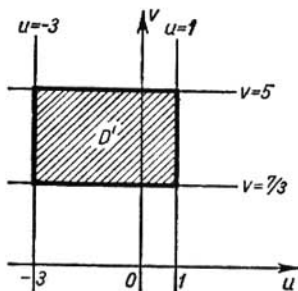


Fig. 306

Ejemplo. Calcular la integral doble

$$\iint_D (y-x) dx dy$$

donde D es el dominio del plano Oxy limitado por las rectas

$$y = x + 1, \quad y = x - 3, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}, \\ y = -\frac{1}{3}x + 5.$$

El cálculo directo de esta integral doble sería una tarea dificultosa, pero un cambio simple de variables permite reducirla a la integral por un rectángulo, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas.

Pongamos

$$u = y - x, \quad v = y + \frac{1}{3}x. \quad (6)$$

Entonces, las rectas $y = x + 1$, $y = x - 3$ serán representadas respectivamente por las rectas $u = 1$, $u = -3$ en el plano Ouv ; las rectas $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$, por las $v = \frac{7}{9}$, $v = 5$.

Por tanto, el dominio dado D será representado por el dominio rectangular D' expuesto en la fig. 306. Nos queda calcular el jacobiano de transformación. Con este fin expresemos x e y en función de u y v . Resolviendo el sistema de ecuaciones (6), obtenemos:

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v; \quad y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v.$$

Por consiguiente,

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4},$$

y el valor absoluto de jacobiano es $|I| = \frac{3}{4}$. Por eso,

$$\begin{aligned} \iint_D (y-x) dx dy &= \iint_{D'} \left[\left(+\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \right) \right] \frac{3}{4} du dv = \\ &= \iint_{D_1} \frac{3}{4} u du dv = \int_{\frac{7}{3}}^5 \int_{-3}^1 \frac{3}{4} u du dv = -18. \end{aligned}$$

§ 7. CALCULO DE LAS AREAS DE SUPERFICIES

Supongamos que es preciso calcular el área de una superficie limitada por una curva Γ (fig. 307); sea dada la superficie por una

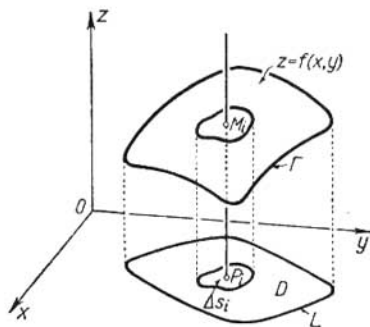


Fig. 307

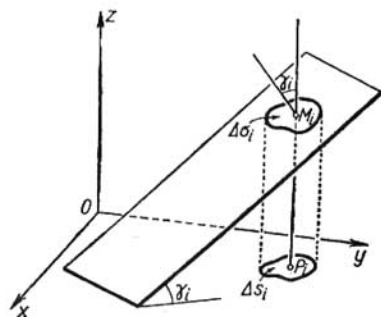


Fig. 308

ecuación $z = f(x, y)$, donde la función $f(x, y)$ es continua y tiene las derivadas parciales continuas.

Sea L la proyección de la curva Γ sobre el plano Oxy . Designemos por D el dominio del plano Oxy , limitado por L .

Dividamos arbitrariamente el dominio D en n dominios parciales o elementales $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Tomemos en cada dominio parcial Δs_i un punto arbitrario $P_i (\xi_i, \eta_i)$. Al punto P_i corresponderá un punto en la superficie

$$M_i [\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)].$$

Por el punto M_i tracemos un plano tangente a la superficie. Su ecuación será:

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \quad (1)$$

(véase § 6, cap. IX, tomo I). En este plano elijamos un dominio parcial $\Delta \sigma_i$ tal que se proyecta sobre el plano Oxy en forma del dominio elemental Δs_i . Consideremos la suma de todos los dominios elementales $\Delta \sigma_i$:

$$\sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i.$$

El límite σ de esta suma, cuando el máximo de los diámetros de $\Delta \sigma_i$ tiende a cero, llamemos *área de la superficie*, es decir, según la definición, pongamos:

$$\sigma = \lim_{\text{diám } \Delta \sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i. \quad (2)$$

Calculemos ahora el área de la superficie. Designemos por γ_i el ángulo formado por el plano tangente y el plano Oxy . Basándonos en la fórmula conocida de la geometría analítica, podemos escribir (fig. 308):

$$\Delta s_i = \Delta \sigma_i \cos \gamma_i$$

ó

$$\Delta \sigma_i = \frac{\Delta s_i}{\cos \gamma_i}. \quad (3)$$

El ángulo γ_i también está formado por el eje Oz y la normal al plano (1). Por eso, en virtud de la ecuación (1) y de la fórmula correspondiente de la geometría analítica tenemos:

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}}.$$

Por consiguiente,

$$\Delta \sigma_i = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)} \Delta s_i.$$

Poniendo esta expresión en la fórmula (2), obtenemos:

$$\sigma = \lim_{\text{diám } \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)} \Delta s_i.$$

Como el límite de la suma integral del segundo miembro de esta última igualdad es, según la definición, la integral doble

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

en definitiva, tenemos:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (4)$$

Esta es la fórmula que permite calcular el área de la superficie $z = f(x, y)$.

Si la ecuación de la superficie es dada en la forma

$x = \mu(y, z)$ o en la forma $y = \chi(x, z)$,

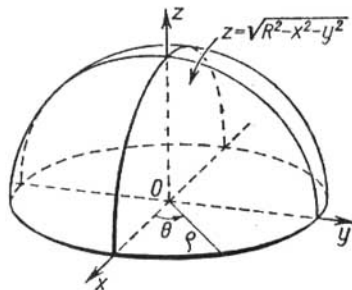


Fig. 309

entonces las fórmulas correspondientes, para calcular las superficies, tienen la forma:

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz, \quad (3')$$

$$\sigma = \iint_{D''} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz, \quad (3'')$$

donde D' y D'' son los dominios de los planos Oyz y Orz en los cuales se proyecta la superficie dada.

Ejemplo 1. Calcular la superficie σ de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Solución. Calculemos la superficie de la mitad superior de la esfera

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

(fig. 309). En este caso tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Por tanto,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

El dominio de integración está determinado por la condición

$$x^2 + y^2 \leq R^2.$$

Así, en virtud de la fórmula (4), tenemos:

$$\frac{1}{2} \sigma = \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dy \right) dx.$$

Para calcular la integral doble obtenida, pasemos a las coordenadas polares. En estas coordenadas la ecuación de la frontera del dominio de integración es $\rho = R$. Por consiguiente,

$$\sigma = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho \right) d\theta = \\ = 2R \int_0^{2\pi} [-\sqrt{R^2 - \rho^2}]_0^R d\theta = 2R \int_0^{2\pi} R d\theta = 4\pi R^2.$$

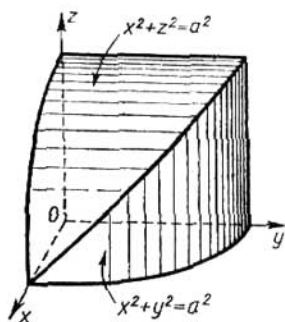


Fig. 310

Ejemplo 2. Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$

la cual se recorta por otro cilindro

$$x^2 + z^2 = a^2.$$

Solución. En la figura 310 está expuesta la parte octava de la superficie buscada. La ecuación de la superficie es $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; por eso,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0;$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

El dominio de integración es una cuarta parte del círculo, es decir, se determina por las condiciones siguientes:

$$x^2 + z^2 \leq a^2, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{8} \sigma = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \right) dz = a \int_0^a \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \int_0^a dx = a^2, \\ \sigma = 8a^2.$$

§ 8. DENSIDAD DE DISTRIBUCION DE LA MATERIA Y LA INTEGRAL DOBLE

Supongamos que cierta materia está distribuida en el dominio D de modo que cada unidad del área D contiene una cantidad determinada de ésta. Se trata aquí de la distribución de la masa, aunque nuestros razonamientos siguen en vigor cuando hablemos de la distribución de carga eléctrica, cantidad de calor, etc.

Examinemos un dominio parcial arbitrario Δs de D . Sea Δm la masa de la materia distribuida en este dominio parcial. Entonces, la razón $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ se llama densidad superficial media de la materia en Δs .

Suponemos ahora que el dominio parcial Δs disminuye, reduciéndose, finalmente, al punto $P(x, y)$. Examinemos el límite $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}$. Si este límite existe, él dependerá, en caso general, de la posición del punto P , es decir, de sus coordenadas x e y , representando en sí cierta función $f(P)$ del punto P . Este límite lo llamaremos *densidad superficial* de la materia en el punto P :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = f(P) = f(x, y). \quad (1)$$

Así, la densidad superficial es una función $f(x, y)$ de las coordenadas del punto examinado en el dominio.

Supongamos, ahora, inversamente que en el dominio D está dada la densidad superficial de cierta materia como una función continua $f(P) = f(x, y)$; es preciso determinar la cantidad total de la materia M que se contiene en D . Dividamos el dominio en los dominios parciales Δs_i ($i = 1, 2, \dots, n$), y en cada de ellos tomemos un punto P_i . Entonces, $f(P_i)$ es la densidad superficial en el punto P_i .

El producto $f(P_i) \Delta s_i$ nos da la cantidad de la materia contenida en Δs_i (con la precisión de hasta las infinitesimales de orden superior), mientras que la suma

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i$$

expresa aproximadamente la cantidad total de la substancia distribuida en el dominio D . Pero ésta es la suma integral para la función $f(P)$ en D . El valor preciso lo obtenemos pasando al límite, cuando $\Delta s_i \rightarrow 0$.

Por consiguiente*),

$$M = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i = \iint_D f(P) ds = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

es decir, la cantidad total de materia en el dominio D es igual a la integral doble por D de la densidad $f(P) = f(x, y)$ de esta sustancia.

Ejemplo. Determinar la masa de una placa redonda de radio R , si la densidad superficial $f(x, y)$ del material en cada punto $P(x, y)$ es proporcional a la distancia del punto (x, y) al centro de la placa, es decir, si

$$f(x, y) = k \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Solución. Según la fórmula (2), tenemos

$$M = \iint_D k \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

donde el dominio de integración D es el círculo $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Pasando a las coordenadas polares, obtenemos

$$M = k \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho \rho d\rho \right) d\theta = k 2\pi \frac{R^3}{3} \Big|_0^R = \frac{2}{3} k \pi R^3.$$

§ 9. MOMENTO DE INERCIA DEL AREA DE UNA FIGURA PLANA

Se llama momento de inercia I de un punto material M de masa m respecto a un cierto punto O al producto de la masa m por el cuadrado de la distancia r entre los puntos M y O :

$$I = mr^2.$$

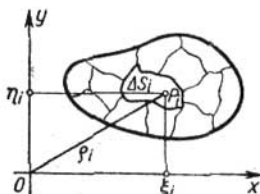


Fig. 311

El momento de inercia de un sistema de puntos materiales $m_1, m_2, \dots, m_n$ respecto al punto O es la suma de los momentos de inercia de los diversos puntos del sistema:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Determinemos, ahora, el momento de inercia de una figura material plana D .

Supongamos que la figura D está situada en el plano de coordenadas Oxy . Determinemos el momento de inercia de esta figura respecto al origen de coordenadas, suponiendo que la densidad superficial es por dondequiera igual a la unidad.

Dividamos D en los dominios parciales ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (fig. 311). En cada dominio parcial tomemos un punto P_i de coor-

*) La expresión $\Delta s_i \rightarrow 0$ significa aquí que el diámetro de Δs_i tiende a cero.

denadas ξ_i, η_i . El producto de la masa del dominio parcial ΔS_i por el cuadrado de la distancia $r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2$, se llama momento elemental de inercia ΔI_i de ΔS_i :

$$\Delta I = (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i.$$

Formemos la suma de estos momentos:

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i,$$

la que es, al mismo tiempo, una suma integral para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ por el dominio D .

Determinemos el momento de inercia de la figura D como el límite de esta suma integral, cuando el diámetro de cada ΔS_i tiende a cero:

$$I_0 = \lim_{\text{diám } \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i.$$

Pero, el límite de esta suma es la integral doble $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.

Por consiguiente, el momento de inercia de la figura D respecto al origen de coordenadas es igual a:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad (1)$$

donde D es el dominio coincidente con la figura plana dada.

Las integrales

$$I_{xx} = \iint_D y^2 dx dy, \quad (2)$$

$$I_{yy} = \iint_D x^2 dx dy \quad (3)$$

se llaman, respectivamente, los momentos de inercia de la figura D respecto a los ejes Ox y Oy .

Ejemplo 1. Calcular el momento de inercia del área de círculo D de radio R , respecto al centro O .

Solución: Según la fórmula (1), tenemos:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Para calcular esta integral, pasaremos a las coordenadas polares θ, ρ .

La ecuación de la circunferencia en coordenadas polares es $\rho = R$. Por eso,

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho^2 \rho d\rho \right) d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Observación. Si la densidad superficial γ no es igual a 1 y es una cierta función de x e y , es decir, $\gamma = \gamma(x, y)$, entonces la masa del dominio parcial ΔS_i será igual a $\gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$ (con precisión de

hasta las infinitesimales de orden superior) y por esto, el momento de inercia de una figura plana respecto al origen de coordenadas, será:

$$I_0 = \iint_D \gamma(x, y) (x^2 + y^2) dx dy. \quad (1')$$

Ejemplo 2. Calcular el momento de inercia de la figura material plana D limitada por las líneas $y^2 = 1 - x$; $x = 0$, $y = 0$, respecto al eje Oy , si la densidad superficial en cada punto es igual a y (fig. 312).

Solución.

$$I_{yy} = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2 dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x) dx = \frac{1}{24}.$$

Elipse de inercia. Determinemos el momento de inercia de una figura plana D respecto a cierto eje OL que pasa por un punto O tomado por el origen de coordenadas.

Sea φ el ángulo formado por la recta OL con la dirección positiva del eje Ox (fig. 313).

La ecuación normal de la recta OL es

$$x \operatorname{sen} \varphi - y \operatorname{cos} \varphi = 0.$$

La distancia r de un punto cualquiera $M(x, y)$ a esta recta es igual a $r = |x \operatorname{sen} \varphi - y \operatorname{cos} \varphi|$. El momento de inercia I del

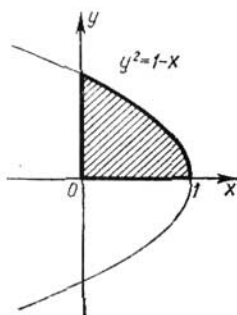


Fig. 312

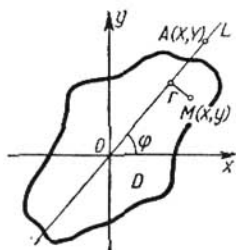


Fig. 313

área D en relación a la recta OL , según la definición, se expresa mediante la integral

$$\begin{aligned} I &= \iint_D r^2 dx dy = \iint_D (x \operatorname{sen} \varphi - y \operatorname{cos} \varphi)^2 dx dy = \\ &= \operatorname{sen}^2 \varphi \iint_D x^2 dx dy - 2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi \iint_D xy dx dy + \operatorname{cos}^2 \varphi \iint_D y^2 dx dy. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$I = I_{yy} \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + I_{xx} \cos^2 \varphi, \quad (4)$$

ponde $I_{yy} = \iint_D x^2 dx dy$ es el momento de inercia de la figura respecto al eje y ; $I_{xx} = \iint_D y^2 dx dy$ es el momento de inercia de la misma respecto al eje x , y , además:

$$I_{xy} = \iint_D xy dx dy.$$

Dividiendo todos los términos de la última ecuación (4) por I obtenemos:

$$1 = I_{xx} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I}} \right)^2 - 2I_{xy} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{I}} \right) \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I}} \right) + I_{yy} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{I}} \right)^2. \quad (5)$$

Tomemos en la recta OL un punto $A(X, Y)$ tal, que sea

$$OA = \frac{1}{\sqrt{I}}.$$

Distintos valores de I y diferentes puntos A corresponden a varias direcciones del eje OL , es decir, a diferentes valores del ángulo φ . Hallemos el lugar geométrico de los puntos A . Es evidente, que

$$X = \frac{1}{\sqrt{I}} \cos \varphi, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{I}} \sin \varphi.$$

En virtud de la igualdad (5), las magnitudes X e Y están entrelazadas por la correlación

$$1 = I_{xx} X^2 - 2I_{xy} XY + I_{yy} Y^2. \quad (6)$$

De este modo, el lugar geométrico de los puntos $A(X, Y)$ es la curva de segundo grado (6). Demostremos que esta curva es una elipse. Tenemos la siguiente desigualdad, llamada de Buniakovski*) (mate-

*) Para demostrar la desigualdad de Buniakovski examinemos la siguiente desigualdad evidente:

$$\iint_D [f(x, y) - \lambda \varphi(x, y)]^2 dx dy \geq 0,$$

donde λ es una constante. El signo de igualdad puede tener lugar sólo en el caso, en que $f(x, y) - \lambda \varphi(x, y) \equiv 0$, es decir, cuando $f(x, y) = \lambda \varphi(x, y)$. Si suponemos que $\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} \neq \text{const} = \lambda$, siempre tendrá lugar el signo de desigualdad. Así, abriendo los paréntesis bajo el signo de integral, obtenemos:

$$\iint_D f^2(x, y) dx dy - 2\lambda \iint_D f(x, y) \varphi(x, y) dx dy + \lambda^2 \iint_D \varphi^2(x, y) dx dy > 0.$$

Analicemos la expresión del primer miembro como una función de λ . Es un polinomio de segundo grado que nunca se anula. Por tanto, sus raíces son comple-

mático ruso):

$$\left(\iint_D xy \, dx \, dy\right)^2 < \left(\iint_D x^2 \, dx \, dy\right) \iint_D y^2 \, dx \, dy$$

6

$$I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 > 0.$$

Así, el discriminante de la curva (6) es positivo y, por consiguiente, ésta es una elipse (fig. 314). Esta elipse se llama **elipse de inercia**. La noción de elipse de inercia tiene gran importancia en mecánica.

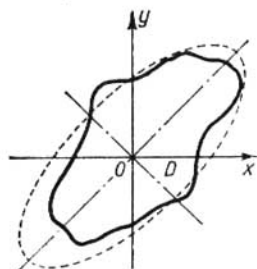


Fig. 314

Notemos que las longitudes de los ejes de la elipse de inercia y su posición en el plano dependen de la forma de la figura plana dada. Como la distancia entre el origen de coordenadas y un punto arbitra-

rio A de la elipse es igual a $\frac{1}{\sqrt{I}}$, donde I

es el momento de inercia de la figura respecto al eje OA , por tanto, al construir la elipse, es fácil calcular el momento de inercia de la figura D respecto a una recta cualquiera, que pasa por el origen de coordenadas. En particular, es fácil ver que el

momento de inercia de la figura es máximo respecto al eje pequeño de esta elipse, y mínimo, respecto a su eje grande.

§ 10. COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD DEL AREA DE UNA FIGURA PLANA

Hemos indicado en el § 8 del capítulo XII (tomo I), que las coordenadas del centro de gravedad de un sistema de puntos materiales $P_1, P_2, \dots, P_n$ (de masas $m_1, m_2, \dots, m_n$, respectivamente)

jos, lo que puede tener lugar sólo en el caso cuando el discriminante, formado de los coeficientes del polinomio cuadrático sea negativo, es decir:

$$\left(\iint_D f \varphi \, dx \, dy\right)^2 - \iint_D f^2 \, dx \, dy \iint_D \varphi^2 \, dx \, dy < 0$$

6

$$\left(\iint_D f \varphi \, dx \, dy\right)^2 < \iint_D f^2 \, dx \, dy \iint_D \varphi^2 \, dx \, dy.$$

Esta es la desigualdad de Buniakovski. En nuestro caso $f(x, y) = x$, $\varphi(x, y) = y$, $\frac{x}{y} \neq \text{const.}$

La desigualdad de Buniakovski siempre se usa en diferentes ramas de las matemáticas. En varias obras esta desigualdad erróneamente se llama desigualdad de Schwarz. Buniakovski la publicó (junto con otras desigualdades importantes) en el año 1859, mientras que Schwarz lo hizo 16 años después.

se determinan por las fórmulas:

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}. \quad (1)$$

Determinemos, ahora, las coordenadas del centro de gravedad de una figura plana D . Dividámosla en los dominios parciales ΔS_i muy pequeños. Si suponemos que la densidad superficial es igual a 1, la masa del dominio parcial será igual a su área. Si convencionalmente suponemos que toda la masa de ΔS_i está concentrada en alguno de sus puntos $P_i (\xi_i, \eta_i)$, podemos considerar la figura D como un **sistema de puntos materiales**. En este caso, en virtud de las fórmulas (1), las coordenadas del centro de gravedad de esta figura serán determinadas, **aproximadamente**, por las igualdades:

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \Delta S_i}; \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \Delta S_i}.$$

Pasando al límite, cuando $\Delta S_i \rightarrow 0$, las sumas integrales en los numeradores y los denominadores de las fracciones se transforman en las integrales dobles, con lo que obtenemos las fórmulas exactas para calcular las coordenadas del centro de gravedad de una figura plana:

$$x_c = \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy}; \quad y_c = \frac{\iint_D y \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy}. \quad (2)$$

Estas fórmulas deducidas para una figura plana de densidad superficial igual a 1 son válidas, también, para cada figura, que tiene otra densidad γ cualquiera, constante en todos los puntos.

Si la densidad superficial es variable:

$$\gamma = \gamma(x, y),$$

las fórmulas correspondientes toman, entonces, la forma:

$$x_c = \frac{\iint_D \gamma(x, y) x \, dx \, dy}{\iint_D \gamma(x, y) \, dx \, dy}; \quad y_c = \frac{\iint_D \gamma(x, y) y \, dx \, dy}{\iint_D \gamma(x, y) \, dx \, dy}.$$

Las expresiones

$$M_y = \iint_D \gamma(x, y) x \, dx \, dy \quad \text{y} \quad M_x = \iint_D \gamma(x, y) y \, dx \, dy$$

se llaman *momentos estáticos* de la figura plana D respecto a los ejes Oy y Ox .

La integral $\iint \gamma(x, y) dx dy$ expresa la magnitud de la masa de la figura examinada.

Ejemplo. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la cuarta parte de la elipse (fig. 315)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

suponiendo, que la densidad superficial en todos los puntos es igual a 1.

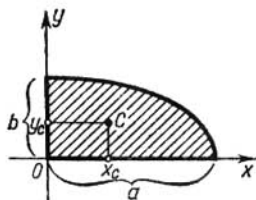


Fig. 315

Solución. Según las fórmulas (2), obtenemos:

$$x_c = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} x dy \right) dx}{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy \right) dx} = \frac{\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} x dx}{\frac{1}{4} \pi ab} = \frac{\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^a}{\frac{1}{4} \pi ab} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} y dy \right) dx}{\frac{1}{4} \pi ab} = \frac{4b}{3\pi}.$$

§ 11. INTEGRAL TRIPLE

Sea dado en el espacio cierto dominio V , limitado por una superficie cerrada S . Supongamos que en el dominio V y en su frontera está definida una función continua $f(x, y, z)$, donde x, y, z son las coordenadas rectangulares de un punto del dominio. Para precisar las ideas en el caso, en que $f(x, y, z) \geq 0$, podemos suponer que ésta representa la densidad de distribución de cierta materia en el dominio V .

Dividamos el dominio V arbitrariamente en dominios parciales Δv_i , designando con el símbolo Δv_i no sólo el dominio elemental,

sino también su volumen. En cada Δv_i tomemos un punto arbitrario P_i y designemos por $f(P_i)$ el valor de la función f en este punto. Formemos la suma integral

$$\sum f(P_i) \Delta v_i \quad (1)$$

y aumentemos indefinidamente el número de los dominios parciales de modo que el diámetro máximo de Δv_i tienda a cero*). Si la función $f(x, y, z)$ es continua, existe el límite de las sumas integrales de la forma (1), donde al límite se le da el mismo significado, que hemos dado durante la determinación de la integral doble**). Este límite, que no depende del modo de dividir el dominio V , ni de la manera de elegir los puntos P_i , se designa por el símbolo $\iiint_V f(P) dv$ y se llama *integral triple*. Así, según la definición, tenemos:

$$\lim_{\text{diám } \Delta v_i \rightarrow 0} \sum f(P_i) \Delta v_i = \iiint_V f(P) dv$$

ó

$$\iiint_V f(P) \Delta v = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz. \quad (2)$$

Si consideramos $f(x, y, z)$ como la densidad volumétrica de la distribución de una materia en un dominio V , la integral (2) nos dará la masa de toda la substancia contenida en el volumen V .

§ 12. CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE

Supóngase que un dominio espacial (tridimensional) V , limitado por una superficie cerrada S , tiene las siguientes propiedades:

1) toda recta paralela al eje Oz , trazada por un punto interior del dominio V (es decir, por un punto que no pertenece a la frontera S) corta la superficie S en dos puntos;

2) todo dominio V se proyecta sobre el plano Oxy en forma de un dominio regular (de dos dimensiones) D ;

3) toda parte del dominio V , separada por un plano paralelo a un plano de coordenadas cualquiera (Oxy , Oxz , Oyz), también posee las propiedades 1) y 2).

Un dominio V que tiene las propiedades indicadas se llama dominio *regular* tridimensional.

*) Se llama diámetro del dominio parcial Δv_i la distancia máxima entre los puntos de su frontera.

**) Admitamos sin demostración este teorema sobre la existencia del límite de las sumas integrales (es decir, la existencia de la integral triple) que tiene lugar para toda función continua en un dominio cerrado V , incluyendo la frontera.

Estos dominios tridimensionales regulares son, por ejemplo, un elipsoide, un paralelepípedo rectangular, un tetraédro, etc. En la figura 316 se da un ejemplo del dominio tridimensional irregular. En este párrafo examinemos sólo los dominios regulares.

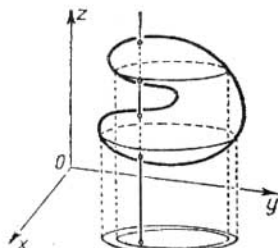


Fig. 316

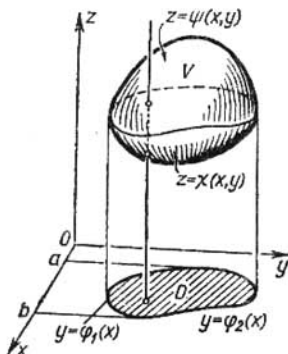


Fig. 317

Sea $z = \chi(x, y)$ la ecuación de una superficie que limita el dominio V por debajo, y $z = \psi(x, y)$, la de una superficie que limita V por arriba (fig. 317).

Introduzcamos la noción de una *integral iterada* de tercer orden I_V , extendida por el dominio V , de una función de tres variables $f(x, y, z)$ definida y continua en V . Supongamos que la proyección del dominio V sobre el plano Oxy es el dominio D que está limitado por las líneas:

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad x = a, \quad x = b.$$

En este caso, la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z)$ por el dominio V se determina así:

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx. \quad (1)$$

Notemos que, como el resultado de la integración respecto a z , y la sustitución de los límites en las llaves, obtenemos una función de x e y . Luego, se puede calcular una integral doble de esta función extendida por el dominio D , como lo hemos hecho anteriormente.

Demos un ejemplo del cálculo de una integral iterada de tercer orden.

Ejemplo 1. Calcular la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z) = xyz$, extendida por el dominio V limitado por los planos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$

Solución. Este dominio es regular: puesto que está limitado por encima y por debajo por los planos $z = 0$, $z = 1 - x - y$, respectivamente y , además, su proyección sobre el plano Oxy representa un dominio regular plano D que es un triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$ (fig. 318). Por eso, la integral iterada de tercer orden se calcula de la manera siguiente:

$$I_V = \iint_D \left[\int_0^{1-x-y} xyz \, dz \right] d\sigma.$$

Poniendo los límites en la integral iterada de segundo orden extendida por el dominio D , obtenemos:

$$\begin{aligned} I_V &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} xyz \, dz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dy \right\} dx = \int_0^1 \frac{x}{24} (1-x)^4 dx = \frac{1}{720}. \end{aligned}$$

Analicemos, ahora, algunas propiedades de la integral iterada de tercer orden.

Propiedad 1. Si el dominio V está dividido en dos dominios V_1 y V_2 mediante un plano paralelo a cualquiera de los planos de coordenadas, la integral iterada de tercer orden extendida por el dominio V es igual a la suma de integrales iteradas de tercer orden extendidas por los dominios V_1 y V_2 .

No hace falta repetir aquí la demostración de esta propiedad, pues, es idéntica en todos los puntos a la aplicada en el caso de la integral iterada de segundo orden.

Corolario. Cualquiera que sea el modo de dividir el dominio V en un número finito de dominios $V_1, \dots, V_n$ mediante planos paralelos a los planos de coordenadas, se verifica la igualdad:

$$I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + \dots + I_{V_n}.$$

Propiedad 2 (Teorema sobre la evaluación de una integral iterada de tercer orden). Si m y M son valores mínimo y máximo, respectivamente, de la función $f(x, y, z)$ en el dominio V , se verifica la desigualdad:

$$mV \leq I_V \leq MV,$$

donde V es el volumen del dominio dado y I_V , la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z)$, extendida por V .

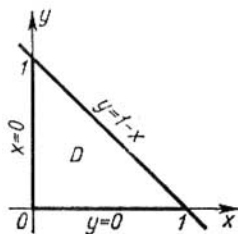


Fig. 318

Demostración. Evaluemos al principio la integral interior que forma parte de la integral iterada de tercer orden $I_V =$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_D \left[\int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma : \\
 &\int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \leq \int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} M dz = M \int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} dz = \\
 &= Mz \Big|_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} = M[\psi(x, y) - \chi(x, y)].
 \end{aligned}$$

Así, la integral interior no supera a la expresión $M[\psi(x, y) - \chi(x, y)]$. Por consiguiente, en virtud del teorema del § 1 sobre las integrales dobles, designando por D la proyección del dominio V sobre el plano Oxy , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 I_V &= \iint_D \left[\int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma \leq \iint_D M[\psi(x, y) - \chi(x, y)] d\sigma = \\
 &= M \iint_D [\psi(x, y) - \chi(x, y)] d\sigma.
 \end{aligned}$$

Pero, la última integral iterada de segundo orden es igual a la integral doble de la función $\psi(x, y) - \chi(x, y)$ y, por tanto, al volumen del dominio comprendido entre las superficies $z = \chi(x, y)$ y $z = \psi(x, y)$, es decir, al volumen del dominio V . Por consiguiente,

$$I_V \leq MV.$$

De modo análogo demostremos que $I_V \geq mV$. La propiedad 2 queda así demostrada.

Propiedad 3 (Teorema de la media). La integral iterada de tercer orden I_V de una función continua $f(x, y, z)$ extendida por el dominio V es igual al producto de su volumen V por el valor de la función en un cierto punto P del dominio V , es decir,

$$I_V = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx = f(P) V. \quad (2)$$

La demostración de esta propiedad es análoga a la que hemos dado durante la demostración de semejante propiedad para la integral doble (véase § 2, propiedad 3, fórmula (4)). Ahora podremos demostrar el teorema sobre el cálculo de la integral triple.

Teorema. La integral triple de una función $f(x, y, z)$, extendida por un dominio regular V es igual a la integral iterada de tercer

orden extendida por el mismo dominio; es decir,

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left\{ \int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dy dx.$$

Demostración. Dividamos el dominio V mediante planos paralelos a los planos de coordenadas en n dominios regulares:

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 + \dots + \Delta v_n.$$

Designemos con I_V , como hemos hecho anteriormente, la integral iterada de tercer orden de la función $f(x, y, z)$ extendida por el dominio V y con $I_{\Delta v_i}$, la integral iterada de tercer orden extendida por Δv_i . En virtud del corolario de la propiedad 1 se puede escribir la igualdad:

$$I_V = I_{\Delta v_1} + I_{\Delta v_2} + \dots + I_{\Delta v_n}. \quad (3)$$

Transformemos cada sumando del segundo miembro de esta ecuación según la fórmula (2):

$$I_V = f(P_1) \Delta v_1 + f(P_2) \Delta v_2 + \dots + f(P_n) \Delta v_n, \quad (4)$$

donde P_i es cierto punto de Δv_i .

En el segundo miembro de la igualdad (4) tenemos una suma integral. Según la hipótesis, la función $f(x, y, z)$ es continua en el dominio V , por lo cual, cuando el diámetro máximo de Δv_i tiende a cero; el límite de esta suma existe y es igual a la integral triple de la función $f(x, y, z)$ extendida por el dominio V . Así, pasando al límite en la igualdad (4), para diám $\Delta v_i \rightarrow 0$, obtenemos:

$$I_V = \iiint_V f(x, y, z) dv,$$

o, en definitiva, cambiando de lugar las expresiones del primer y segundo miembros, tenemos:

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left\{ \int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dy dx.$$

El teorema queda demostrado.

Aquí, $z = \chi(x, y)$ y $z = \psi(x, y)$ son ecuaciones de las superficies que limitan el dominio regular V por debajo y por arriba. Las líneas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, limitan el dominio D que es la proyección de V sobre el plano Oxy .

Observación. Igual que en el caso de la integral iterada de segundo orden, si la forma del dominio V lo permite, se puede formar la integral iterada de tercer orden con otra sucesión de la integración respecto a las variables y con otros límites.

Cálculo del volumen de un cuerpo mediante la integral iterada de tercer orden.

Si el integrando $f(x, y, z) = 1$, la integral iterada de tercer orden extendida por el dominio V expresa el volumen V de este

dominio:

$$V = \iiint_V dx \, dy \, dz. \quad (5)$$

Ejemplo 2. Calcular el volumen de un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Solución. El elipsoide (fig. 319), está limitado por debajo, con la superficie $z = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ y por encima, con la $z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

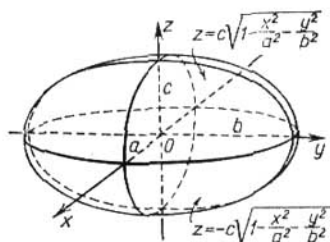


Fig. 319

La proyección de este elipsoide sobre el plano Oxy (dominio D) es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Por consiguiente, reduciendo a la integral iterada de tercer orden, obtenemos:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \right) dy \right] dx = \\ &= 2c \int_{-a}^a \left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy \right] dx. \end{aligned}$$

Durante el cálculo de la integral interior consideremos x constante. Hagamos sustitución:

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin t, \quad dy = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cos t \, dt.$$

La variable y varía desde $-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ hasta $b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, por lo que t

varía desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$. Poniendo los nuevos límites en la integral, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 V &= 2c \int_{-a}^a \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin^2 t} \, b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cos t \, dt \right] dx = \\
 &= 2cb \int_{-a}^a \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \right] dx = \frac{cb\pi}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4\pi abc}{3}.
 \end{aligned}$$

Así, $V = \frac{4}{3} \pi abc$. Si $a = b = c$, obtenemos el volumen de una esfera:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

§ 13. CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL TRIPLE

1. Integral triple en coordenadas cilíndricas. En las así llamadas coordenadas cilíndricas la posición del punto P en el espacio se determina mediante tres números θ, ρ, z , donde θ y ρ son las coordenadas polares de la proyección del punto P sobre el plano Oxy ,

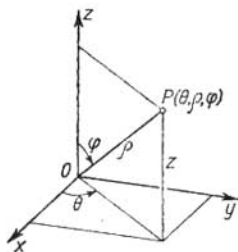


Fig. 320

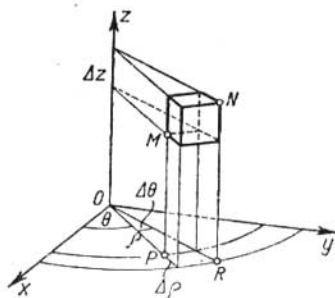


Fig. 321

y z es la cota del mismo punto P , es decir, su distancia hasta el plano Oxy ; la última tiene el signo «más», si el punto se encuentra encima del plano Oxy y el signo «menos», en el caso contrario (fig. 320).

Dividamos el dominio tridimensional dado V en volúmenes elementales mediante las superficies de coordenadas $\theta = \theta_i$, $\rho = \rho_j$,

$z = z_k$ las que son, respectivamente, semiplanos que contienen el eje Oz , cilindros circulares cuyo eje coincide con el Oz , planos perpendiculares al eje Oz . El volumen elemental es, entonces, un prisma curvilíneo representado en la fig. 321. El área de la base de este prisma, con la precisión de hasta infinitesimales de orden superior, es igual a $\rho \Delta\theta \Delta\rho$, su altura es Δz . Para simplificar la inscripción omitamos los índices i, j, k . Por tanto, $\Delta v = \rho \Delta\theta \Delta\rho \Delta z$. La integral triple de la función $F(\theta, \rho, z)$, por el dominio V tiene la forma

$$I = \iiint_V F(\theta, \rho, z) \rho d\theta d\rho dz. \quad (1)$$

Los límites de integración son determinados por la forma del dominio V .

Si la integral triple de la función $f(x, y, z)$ está dada en coordenadas rectangulares, es fácil transformarla en la integral triple en coordenadas cilíndricas. En efecto, al notar que

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z, \quad \text{obtenemos:}$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V F(\theta, \rho, z) \rho d\theta d\rho dz,$$

donde

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) = F(\theta, \rho, z).$$

Ejemplo. Determinar la masa M de una semiesfera de radio R y centro en el origen de las coordenadas, si la densidad F de su material en cada punto (x, y, z) es proporcional a la distancia entre este punto y la base, es decir, $F = kz$.

Solución. La ecuación de la semiesfera superior

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

en las coordenadas cilíndricas tiene la forma

$$z = \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V kz \rho d\theta d\rho dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} kz dz \right) \rho d\rho \right] d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{kz^2}{2} \bigg|_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{k}{2} (R^2 - \rho^2) \rho d\rho \right] d\theta = \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right] d\theta = \frac{k}{2} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{k\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

2. Integral triple en coordenadas esféricas. En coordenadas esféricas la posición de un punto P en el espacio la determinan tres números θ, r, φ , donde r es la distancia del punto al origen de coorde-

nadas, así llamado radio vector del punto, φ es el ángulo entre el radio vector y el eje Oz , θ es el ángulo entre la proyección del radio vector sobre el plano Oxy y el eje Ox . El último ángulo lo tomamos a partir del eje Ox , en la dirección positiva (es decir, contra el movimiento de las agujas del reloj) (fig. 322). Para todo punto del espacio tenemos:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Dividamos el dominio dado V en los volúmenes elementales Δv mediante las superficies de coordenadas $r = \text{const}$ (esferas), $\varphi =$

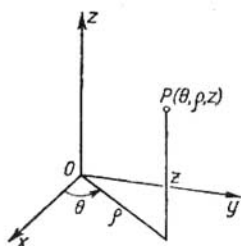


Fig. 322

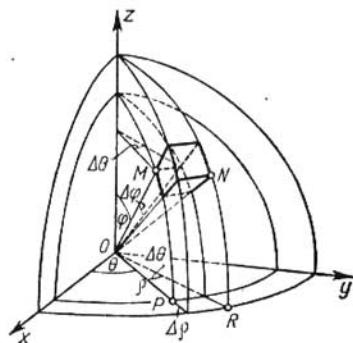


Fig. 323

$\varphi = \text{const}$ (superficies cónicas con los vértices en el origen de coordenadas), $\theta = \text{const}$ (semiplanos que pasan por el eje Oz). Con la precisión de hasta infinitesimales de orden superior, podemos considerar el volumen elemental Δv como paralelepípedo de las aristas de longitudes Δr , $r \Delta \varphi$, $r \sin \varphi \Delta \theta$. Entonces el volumen elemental es igual a (véase fig. 323):

$$\Delta v = r^2 \sin \varphi \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi.$$

La integral triple de la función $F(\theta, r, \varphi)$, por el dominio V , tiene la forma

$$I = \int_V \int \int F(\theta, r, \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi. \quad (1)$$

Los límites de la integración son determinados por la forma del dominio V . De la figura 322 se deducen fácilmente las expresiones de las coordenadas cartesianas en función de las esféricas:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi.$$

Por eso, la fórmula de transformación de una integral triple en coordenadas cartesianas a la de coordenadas esféricas tiene la forma:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_V f[r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, r \cos \varphi] r^2 \operatorname{sen} \varphi dr d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

3. Sustitución general de variables en una integral triple. Los pasos de una integral triple en coordenadas cartesianas a la en coordenadas cilíndricas o esféricas son casos particulares de la transformación general de coordenadas en el espacio.

Supongamos que las funciones

$$x = \varphi(u, t, w), \quad y = \psi(u, t, w), \quad z = \chi(u, t, w)$$

representan una relación biunívoca entre el dominio V en las coordenadas cartesianas x, y, z y el dominio V' en las coordenadas curvilíneas u, t, w . Supongamos que el dominio elemental o elemento de volumen Δv de V se transforma en el elemento $\Delta v'$ del dominio V' y que

$$\lim_{\Delta v' \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |I|.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V'} f[\varphi(u, t, w), \psi(u, t, w), \chi(u, t, w)] |I| du dt dw. \end{aligned}$$

Como en el caso de la integral doble aquí, también I se llama *jacobiano*. Aquí, de modo idéntico, como lo hemos hecho para las integrales dobles, se puede demostrar que el jacobiano es numéricamente igual a la determinante de tercer orden:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Así, cuando se trata de coordenadas cilíndricas, tenemos:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta, \quad z = z \quad (\rho = u, \theta = t, z = w)$$

$$I = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

En el caso de coordenadas esféricas tenemos:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi \quad (r = u, \varphi = t, \theta = w);$$

$$I = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi.$$

§ 14. MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO Y COORDENADAS DE SU CENTRO DE GRAVEDAD

1. Momento de inercia de un cuerpo. Los momentos de inercia de un **punto** material $M(x, y, z)$ de masa m , respecto a los ejes de coordenadas Ox, Oy, Oz (fig. 324) se expresan, correspondientemente, por medio de las fórmulas:

$$I_{xx} = (y^2 + z^2) m, \\ I_{yy} = (x^2 + z^2) m, \quad I_{zz} = (x^2 + y^2) m.$$

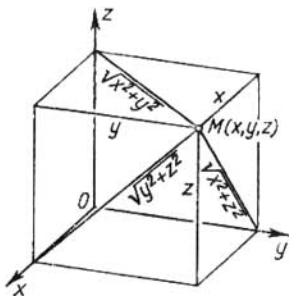


Fig. 324

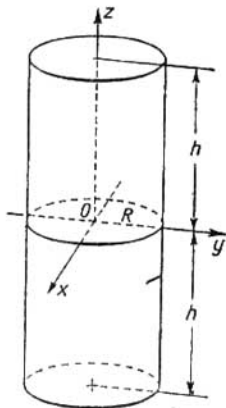


Fig. 325

Los momentos de inercia de un **cuerpo** se expresan por las integrales correspondientes. Así, por ejemplo, el momento de inercia de un cuerpo respecto al eje Oz , se expresa por la integral $I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz$, donde $\gamma(x, y, z)$ es la densidad de la materia.

Ejemplo 1. Calcular el momento de inercia de un cilindro rectocircular de radio R y altura $2h$ respecto al diámetro de su sección media, la densidad es constante e igual a γ_0 .

Solución. Elijamos un sistema de coordenadas del modo siguiente: dirijamos el eje Oz a lo largo del eje del cilindro y coloquemos el origen de coordenadas en su centro de simetría (fig. 325).

El problema se reduce al cálculo del momento de inercia del cilindro respecto al eje Ox :

$$I_{xx} = \int_V \int (y^2 + z^2) \gamma_0 dx dy dz.$$

Pasando a las coordenadas cilíndricas, obtenemos:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[\int_0^h (z^2 + \rho^2 \sin^2 \theta) dz \right] \rho d\rho \right\} d\theta = \\ &= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[\frac{2h^3}{3} + 2h\rho^2 \sin^2 \theta \right] \rho d\rho \right\} d\theta = \\ &= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{2h^3}{3} \frac{R^2}{2} + \frac{2hR^4}{4} \sin^2 \theta \right\} d\theta = \\ &= \gamma_0 \left[\frac{2h^3 R^2}{6} 2\pi + \frac{2hR^4}{4} \pi \right] = \gamma_0 \pi h R^2 \left[\frac{2}{3} h^2 + \frac{R^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

2. Coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo. Análogamente a lo expuesto en el § 8, cap. XII (tomo I) para las figuras planas, las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo se expresan por las fórmulas:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\int_V \int \int x \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\int_V \int \int \gamma(x, y, z) dx dy dz}; & y_c &= \frac{\int_V \int \int y \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\int_V \int \int \gamma(x, y, z) dx dy dz}; \\ z_c &= \frac{\int_V \int \int z \gamma(x, y, z) dx dy dz}{\int_V \int \int \gamma(x, y, z) dx dy dz}, \end{aligned}$$

donde $\gamma(x, y, z)$ es la densidad.

Ejemplo 2. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la mitad superior de una esfera de radio R y centro en el origen de coordenadas; la densidad γ_0 es constante.

Solución. La semiesfera está limitada por las superficies

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad z = 0.$$

La cota de su centro de gravedad se determina por la fórmula:

$$z_c = \frac{\int_V \int \int z \gamma_0 dx dy dz}{\int_V \int \int \gamma_0 dx dy dz}.$$

Pasando a las coordenadas esféricas, obtenemos:

$$z_c = \frac{\gamma_0 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^R r \cos \varphi r^2 \sin \varphi dr \right] d\varphi \right] d\theta}{\gamma_0 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^R r^2 \sin \varphi dr \right] d\varphi \right] d\theta} = \frac{2\pi \frac{R^4}{4} \frac{1}{2}}{\frac{4}{6} \pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

En virtud de la simetría de la semiesfera, evidentemente tenemos

$$x_c = y_c = 0.$$

§ 15. CALCULO DE LAS INTEGRALES DEPENDIENTES DE UN PARAMETRO

Examinemos una integral que depende de un parámetro α :

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx.$$

(Las integrales de este tipo ya las hemos considerado en el § 10, cap. XI, tomo I). Indiquemos sin demostración que si la función $f(x, \alpha)$ es continua respecto a x en el segmento (a, b) , y respecto a α en el segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$, la función

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

es continua en el segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$. Por tanto, podemos integrar la función $I(\alpha)$ respecto a α en el segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x, \alpha) dx \right) d\alpha.$$

La expresión del segundo miembro es la integral iterada de segundo orden de la función $f(x, \alpha)$, por el rectángulo correspondiente al plano $Ox\alpha$. En esta integral se puede invertir el orden de la integración:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x, \alpha) dx \right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \right) dx.$$

Esta fórmula muestra que para la integración de una integral dependiente de un parámetro α es suficiente integrar el elemento de integración respecto a este parámetro α . Esta fórmula suele ser útil también, al calcular ciertas integrales definidas.

Ejemplo. Calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Esta integral indefinida del integrando no se puede calcular mediante las funciones elementales. Para resolver el problema, examinemos otra integral que se calcula fácilmente:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Integrando esta igualdad entre los límites desde $\alpha = a$ hasta $\alpha = b$, obtenemos:

$$\int_a^b \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \right) d\alpha = \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha} = \ln \frac{b}{a}.$$

Cambiando el orden de integración en la primera integral, escribamos esta igualdad en la forma siguiente:

$$\int_0^{\infty} \left[\int_a^b e^{-\alpha x} d\alpha \right] dx = \ln \frac{b}{a},$$

de donde, calculando la integral interior, obtenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

Ejercicios para el capítulo XIV

Calcular las integrales *): 1. $\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^2) dx dy$. Respuesta: $\frac{8}{3}$.

2. $\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy dx}{(x+y)^2}$. Respuesta: $\ln \frac{25}{24}$. 3. $\int_1^2 \int_x^{x\sqrt{3}} xy dx dy$. Respuesta: $\frac{15}{4}$.

*) Como hemos indicado anteriormente, si la integral está escrita en la forma: $\int_M^N \int_K^L f(x, y) dx dy$, entonces consideremos que la primera integración se efectúa respecto a la variable, cuya diferencial ocupa el primer lugar, es decir:

$$\int_M^N \int_K^L f(x, y) dx dy = \int_M^N \left(\int_K^L f(x, y) dy \right) dx.$$

$$4. \int_0^{2\pi} \int_a^a r \, dr \, d\theta. \text{ Respuesta: } \frac{1}{2} \pi a^2. \quad 5. \int_0^a \int_{\frac{x}{a}}^x \frac{x \, dy \, dx}{x^2 + y^2}. \text{ Respuesta: } \frac{\pi a}{4} -$$

$$- a \arctg \frac{1}{a}. \quad 6. \int_0^a \int_{y-a}^{2y} xy \, dx \, dy. \text{ Respuesta: } \frac{11a^4}{24}. \quad 7. \int_0^b \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \, d\theta \, d\rho. \text{ Respuesta:}$$

$$\frac{3}{16} \pi b^2.$$

Determinar los límites de integración para la integral $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, donde el dominio de integración está limitado por las líneas: 8. $x=2$, $x=3$,

$$y=-1, y=5. \text{ Respuesta: } \int_2^3 \int_{-1}^5 f(x, y) \, dy \, dx. \quad 9. y=0, y=1-x^2. \text{ Respuesta:}$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} f(x, y) \, dy \, dx. \quad 10. x^2 + y^2 = a^2. \text{ Respuesta: } \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

$$11. y = \frac{2}{1+x^2}, y = x^2. \text{ Respuesta: } \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x, y) \, dy \, dx. \quad 12. y=0, y=a, y=x,$$

$$y=x-2a. \text{ Respuesta: } \int_0^a \int_y^{y+2a} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Invertir el orden de integración en las integrales:

$$13. \int_1^2 \int_3^4 f(x, y) \, dy \, dx. \text{ Respuesta: } \int_3^4 \int_1^2 f(x, y) \, dx \, dy. \quad 14. \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

$$\text{Respuesta: } \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) \, dx \, dy. \quad 15. \int_0^a \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy. \text{ Respuesta:}$$

$$\int_0^a \int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^a f(x, y) \, dy \, dx. \quad 16. \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx. \text{ Respuesta:}$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy. \quad 17. \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) \, dx \, dy. \text{ Respuesta:}$$

$$\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Pasando a las coordenadas polares, calcular las integrales siguientes:

$$18. \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx. \text{ Respuesta: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{6} a^3.$$

$$19. \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2) dx dy. \text{ Respuesta: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho^3 d\rho d\theta = \frac{\pi a^4}{8}.$$

$$20. \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy dx. \text{ Respuesta: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$21. \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy dx. \text{ Respuesta: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Transformar las integrales dobles, introduciendo nuevas variables u y v , ligadas con x e y mediante las fórmulas $x=u-uv$, $y=uv$:

$$22. \int_0^{\frac{c}{1+\alpha}} \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy dx.$$

$$\text{Respuesta: } \int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} \int_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv) u du dv. \quad 23. \int_0^c \int_0^b f(x, y) dy dx.$$

$$\text{Respuesta: } \int_0^{\frac{b}{b+c}} \int_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv, uv) u du dv + \int_{\frac{b}{b+c}}^1 \int_0^{\frac{b}{v}} f(u-uv, uv) u du dv.$$

Aplicación de la integral doble para el cálculo de áreas

24. Calcular el área de la figura, limitada por la parábola $y^2=2x$ y la recta $y=x$. Respuesta: $\frac{2}{3}$.

25. Calcular el área de la figura, limitada por las líneas $y^2=4ax$, $x+y=3a$, $y=0$. Respuesta: $\frac{10}{3} a^2$.

26. Calcular el área de la figura, limitada por las líneas $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, $x+y=a$. Respuesta: $\frac{a^2}{3}$.

27. Calcular el área de la figura, limitada por las líneas $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$. Respuesta: $\sqrt{2}-1$.

28. Calcular el área de un lazo de la curva $\rho=a \sin 2\theta$. Respuesta: $\frac{\pi a^2}{8}$.

29. Calcular toda el área, limitada por la lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.
 Respuesta: a^2 .

30. Calcular el área de un lazo de la curva $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$.

Indicación: pasar a las nuevas variables $x = \rho a \cos \theta$ e $y = \rho b \sin \theta$.

Respuesta: $\frac{a^2 b^2}{c^2}$.

Cálculo de volúmenes

31. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies:
 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. Respuesta: $\frac{abc}{6}$.

32. $z=0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x+y+z=3$. Respuesta: 3π . 33. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $xy=z$, $z=0$. Respuesta: π . 34. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $z=0$, $x^2 + y^2 = z^2$. Respuesta: $\frac{32}{9} a^3$.

35. $y = x^2$, $x = y^2$, $z=0$, $z = 12 + y - x^2$. Respuesta: $\frac{549}{140}$.

36. Por los planos de coordenadas, el plano $2x + 3y - 12 = 0$ y el cilindro $z = \frac{1}{2} y^2$. Respuesta: 16.

37. Por el cilindro circular de radio a y eje que coincide con el eje Oz , los planos de coordenadas y el plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{a} = 1$. Respuesta: $a^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)$.

38. Por los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$. Respuesta: $\frac{16}{3} a^3$. 39. $y^2 + z^2 = x$, $x=y$, $z=0$. Respuesta: $\frac{\pi}{64}$. 40. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, $a > R$.

Respuesta: $\frac{4}{3} \pi [a^3 - (\sqrt{a^2 - R^2})^3]$. 41. $az = x^2 + y^2$, $z=0$, $x^2 + y^2 = 2ax$. Respuesta: $\frac{3}{2} \pi a^3$. 42. $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z=0$. (Calcular el volumen interior respecto al cilindro).

Respuesta: $\frac{1}{9} a^3 (3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$.

Cálculo del área de una superficie

43. Calcular el área de la parte de la superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$, separada por el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$. Respuesta: $2\pi a^2 \sqrt{2}$.

44. Calcular el área de la parte del plano $x+y+z=2a$, que se encuentra en el primer octante y está limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Respuesta: $\frac{\pi a^2}{4} \sqrt{3}$.

45. Calcular el área de la superficie de un segmento esférico (del menor), si el radio de la esfera es igual a a y el radio de la base del segmento es igual a b . Respuesta: $2\pi (a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2})$.

46. Hallar el área de la parte de la superficie de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ separada por la superficie del cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$). Respuesta: $4\pi a^2 - 8a^2 - \arcsen \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

47. Hallar el área de la superficie de un cuerpo formado por la intersección de dos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$. Respuesta: $16a^2$.

48. Calcular el área de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 2ax$ comprendida entre el plano $z = 0$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$. Respuesta: $8a^2$.

49. Calcular el área de la parte de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = mx$ y $z = 0$. Respuesta: $2ma^2$.

50. Calcular el área de la parte de la superficie de un paraboloide $y^2 + z^2 = 2ax$ comprendida entre el cilindro parabólico $y^2 = ax$ y el plano $x = a$. Respuesta: $\frac{1}{3}\pi a^2 (3\sqrt{3} - 1)$.

Cálculo de la masa, de las coordenadas del centro de gravedad y del momento de inercia de figuras planas

(En los problemas 51-62, y 64 supongamos que la densidad superficial es constante e igual a 1).

51. Determinar la masa de un disco circular de radio a , si la densidad en cualquier punto P es inversamente proporcional a la distancia entre P y el centro (el coeficiente de proporcionalidad es igual a K). Respuesta: $\pi a K$.

52. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un triángulo equilátero, tomando el eje Ox por su altura, y el origen de coordenadas, por su vértice. Respuesta: $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $y = 0$.

53. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un sector circular de radio a , tomando el eje Ox por la bisectriz de su ángulo. El ángulo de abertura del sector es igual a 2α . Respuesta: $x_c = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha}$, $y_c = 0$.

54. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Respuesta: $x_c = 0$, $y_c = \frac{4a}{3\pi}$.

55. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie de un arco de cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Respuesta: $x_c = a\pi$, $y_c = \frac{5a}{6}$.

56. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del área limitada por un lazo de la curva $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. Respuesta: $x_c = \frac{\pi a \sqrt{2}}{8}$, $y_c = 0$.

57. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie de la cardioides $\rho = a(1 + \cos \theta)$. Respuesta: $x_c = \frac{5a}{6}$, $y_c = 0$.

58. Calcular el momento de inercia del área de un rectángulo, limitado por las rectas $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, respecto al origen de coordenadas. Respuesta: $\frac{ab(a^2 + b^2)}{3}$.

59. Calcular el momento de inercia de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

a) respecto al eje Oy ; b) respecto al origen de coordenadas. Respuesta: a) $\frac{\pi a^3 b}{4}$; b) $\frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$.

60. Calcular el momento de inercia del área del círculo $\rho = 2a \cos \theta$ respecto al polo. Respuesta: $\frac{3}{2}\pi a^4$.

61. Calcular el momento de inercia del área de la cardioide $\rho = a(1 - \cos \theta)$ respecto al polo. Respuesta: $\frac{35\pi a^4}{16}$.

62. Calcular el momento de inercia del área del círculo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2a^2$, respecto al eje Oy . Respuesta: $3\pi a^4$.

63. Se da una placa cuadrada de lado a . La densidad en cada punto de esta placa es proporcional a la distancia desde este punto hasta uno de los vértices del cuadrado. Calcular el momento de inercia de la placa respecto a un lado que pasa por este vértice. Respuesta: $\frac{1}{40} ka^5 [7\sqrt{2} + 3 \ln \times (\sqrt{2} + 1)]$, donde k es el factor de proporcionalidad.

64. Calcular el momento de inercia del área de la figura limitada por la parábola $y^2 = ax$ y la recta $x = a$ respecto a la recta $y = -a$. Respuesta: $\frac{8}{5} a^4$.

Integrales triples

65. Calcular $\iiint \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, si el dominio de integración está limitado por los planos de coordenadas y el plano $x+y+z=1$. Respuesta: $\frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}$.

66. Calcular $\int_0^a \left\{ \int_0^x \left[\int_0^y xyz dz \right] dy \right\} dx$. Respuesta: $\frac{a^6}{48}$.

67. Calcular el volumen de un cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y la superficie del paraboloides $x^2 + y^2 = 3z$. Respuesta: $\frac{19}{6} \pi$.

68. *) Calcular las coordenadas del centro de gravedad y los momentos de inercia de la pirámide limitada por los planos: $x=0$, $y=0$, $z=0$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Respuesta: $x_c = \frac{a}{4}$, $y_c = \frac{b}{4}$, $z_c = \frac{c}{4}$; $I_x = \frac{a^3bc}{60}$, $I_y = \frac{b^3ac}{60}$, $I_z = \frac{c^3ab}{60}$, $I_0 = \frac{abc}{60} (a^2 + b^2 + c^2)$.

69. Calcular el momento de inercia de un cono recto circular respecto a su eje. Respuesta: $\frac{1}{10} \pi h r^4$, donde h es la altura del cono y r , el radio de su base.

70. Calcular el volumen de un cuerpo limitado por la superficie de la ecuación $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$. Respuesta: $\frac{1}{3} \pi a^3$.

71. Calcular el momento de inercia de un cono circular respecto al diámetro de su base. Respuesta: $\frac{\pi h r^2}{60} (2h^2 + 3r^2)$.

72. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo limitado por una esfera de radio a y una superficie cónica, de ángulo en el vértice 2α , si el vértice del cono coincide con el centro de la esfera. Respuesta: $x_c = 0$,

*) En los problemas 68-69, 71-73 supongamos que la densidad es constante e igual a 1.

$y_c = 0$, $z_c = \frac{3}{8}a(1 + \cos \alpha)$ (el eje Oz coincide con el del cono y el vértice, con el origen de coordenadas).

73. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo limitado por una esfera de radio a y por dos planos, que pasan por el centro de la esfera y forman entre sí el ángulo de 60° . Respuesta: $\rho = \frac{9}{16}a$, $\theta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (el eje Oz se toma por la línea de intersección de los planos; el centro de la esfera, por el origen de coordenadas; ρ , θ , φ son las coordenadas esféricas).

74. Utilizando la igualdad $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x} d\alpha$ ($\alpha > 0$), calcular las

integrales $\int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{x}}$ y $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\sqrt{x}}$. Respuesta: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

INTEGRALES CURVILINEAS E INTEGRALES DE SUPERFICIE

§ 1. INTEGRAL CURVILINEA

Supongamos que el punto $P(x, y)$ se desplaza a lo largo de una curva plana L de un punto M a un punto N . Al punto P está aplicada la fuerza F que varía en magnitud y dirección cuando P se desplaza, es decir, la fuerza es una función de las coordenadas del punto P :

$$F = F(P).$$

Calculemos el trabajo A de la fuerza F cuando el punto P se desplaza de M a N (fig. 326). Dividamos, para esto, la curva MN en n segmentos arbitrarios por los puntos $M_0 = M, M_1, M_2, \dots, M_n = N$, partiendo de M a N , y designemos por Δs_i el vector $\overline{M_i M_{i+1}}$. Designemos por F_i la magnitud de la fuerza F en el punto M_i . En este caso, el producto escalar $F_i \Delta s_i$ podemos considerarlo como la expresión aproximada del trabajo de F a lo largo del arco $\overline{M_i M_{i+1}}$:

$$A_i \approx F_i \Delta s_i.$$

Sea:

$$F = X(x, y) \mathbf{i} + Y(x, y) \mathbf{j},$$

donde $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ son proyecciones del vector F sobre los ejes Ox y Oy . Designando por Δx_i y Δy_i los incrementos de las coordenadas x_i e y_i durante el paso de M_i a M_{i+1} , obtenemos:

$$\Delta s_i = \Delta x_i \mathbf{i} + \Delta y_i \mathbf{j}.$$

Por consiguiente,

$$F_i \Delta s_i = X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i.$$

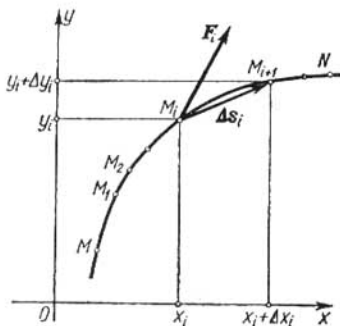


Fig. 326

El valor aproximado de trabajo A de la fuerza F en toda la curva MN es:

$$A \approx \sum_{i=1}^n F_i \Delta s_i = \sum_{i=1}^n [X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i]. \quad (1)$$

Sin hacer las definiciones rigurosas indiquemos mientras tanto que, si el límite de la expresión del segundo miembro de la igualdad existe cuando $\Delta s_i \rightarrow 0$ (es evidente que $\Delta x_i \rightarrow 0$ y $\Delta y_i \rightarrow 0$), entonces, este límite expresa el trabajo de la fuerza F a lo largo de la curva L entre los puntos M y N :

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n [X(x_i, y_i) \Delta x_i + Y(x_i, y_i) \Delta y_i]. \quad (2)$$

El límite *) del segundo miembro se llama *integral curvilínea* de $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ a lo largo de la curva L , y se designa así:

$$A = \int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy \quad (3)$$

6

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy. \quad (3')$$

Los límites de las sumas de la forma (2) se encuentran a menudo en matemáticas y física, $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ se consideran como funciones de dos variables en un cierto dominio D .

Pongamos las letras M y N , que reemplazan los límites de integración en la integral (3'), entre paréntesis, para indicar que ellas no son números, sino designaciones de los extremos de la curva por la que se toma la integral curvilínea. La dirección a lo largo de la curva L de M a N se llama sentido de integración.

Si la curva L es la del espacio, la integral curvilínea de las tres funciones $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ $Z(x, y, z)$ se determina de una manera análoga:

$$\begin{aligned} & \int_L X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz = \\ & = \lim_{\substack{\Delta x_k \rightarrow 0 \\ \Delta y_k \rightarrow 0 \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n X(x_k, y_k, z_k) \Delta x_k + Y(x_k, y_k, z_k) \Delta y_k + Z(x_k, y_k, z_k) \Delta z_k. \end{aligned}$$

La letra L por debajo del signo de la integral indica que la integración se efectúa a lo largo de la curva L .

Indiquemos dos propiedades de la integral curvilínea.

*) Aquí, el límite de la suma integral se entiende en el mismo sentido que en el caso de la integral definida (véase § 2, cap. XI, tomo I).

Propiedad 1. Una integral curvilínea se determina por el elemento de integración, la forma de la curva de integración y el sentido de integración.

La integral curvilínea cambia de signo simultáneamente con el cambio del sentido de integración, puesto que en este caso el vector Δs , y, por tanto, sus proyecciones Δx y Δy cambian de signo.

Propiedad 2. Dividamos la curva L por el punto K en dos partes L_1 y L_2 de modo que $\widehat{MN} = \widehat{MK} + \widehat{KN}$ (fig. 327). Entonces de la fórmula (1) directamente se deduce:

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy = \int_{(M)}^{(K)} X dx + Y dy + \int_{(K)}^{(N)} X dx + Y dy.$$

Esta correlación es válida para cualquier número de sumandos. Indiquemos más que la definición de integral curvilínea es válida también cuando la curva L es cerrada.

En este caso el origen y el extremo de la curva coinciden.

Por eso, cuando tenemos una curva cerrada no podemos escribir

$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy$, sino sólo $\oint_L X dx + Y dy$, indicando obligatoriamente el sentido del recorrido a lo largo de la curva cerrada L . Para designar la integral curvilínea a lo largo del contorno cerrado L frecuentemente se usa también el símbolo $\oint_L X dx + Y dy$.

Observación. Hemos llegado a la noción de la integral curvilínea, considerando el problema sobre el trabajo de una fuerza F en un segmento curvilíneo L .

En este caso supongamos que en todos los puntos de la curva L está dada la fuerza F como una función vectorial de las coordenadas del punto de aplicación (x, y) ; las proyecciones del vector variable F sobre los ejes de coordenadas son iguales a las funciones escalares (es decir, a las numéricas) $X(x, y)$ e $Y(x, y)$. Por esto, una integral curvilínea de la forma $\int_L X dx + Y dy$ podemos consi-

derarla como la integral de la función vectorial F dada por sus proyecciones X y Y .

La integral de la función vectorial F a lo largo de la curva L se designa por el símbolo

$$\int_L F ds.$$

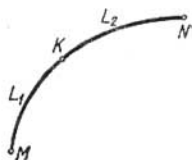


Fig. 327

Si el vector $\mathbf{F}$ se determina por sus proyecciones X , Y , Z , entonces, esta integral es igual a la integral curvilínea

$$\int_L X dx + Y dy + Z dz.$$

En particular, si el vector $\mathbf{F}$ se encuentra en el plano Oxy , la integral de este vector es igual a:

$$\int_L X dx + Y dy.$$

Cuando la integral curvilínea de una función vectorial $\mathbf{F}$ se toma a lo largo de una curva cerrada L , esta integral curvilínea se llama *circulación* del vector $\mathbf{F}$ a lo largo del contorno cerrado L .

§ 2. CALCULO DE LA INTEGRAL CURVILINEA

En este párrafo propongamos precisar la noción del límite de la suma (1), § 1, y, en relación con esto, precisar la noción de la integral curvilínea e indicar el procedimiento de su cálculo.

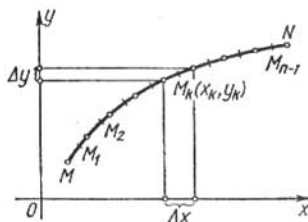


Fig. 328

Supongamos que la curva L está dada por las ecuaciones en forma paramétrica:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Analicemos el arco MN de esta curva (fig. 328). Sean α y β los valores del parámetro correspondientes a los puntos M y N . Dividamos el arco MN en elementos parciales Δs_i , por los puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$, haciendo

$$x_i = \varphi(t_i), \quad y_i = \psi(t_i).$$

Examinemos la integral curvilínea

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy, \quad (1)$$

definida en el párrafo anterior. Demos aquí sin demostración un **teorema sobre la existencia de la integral curvilínea**. Si funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son continuas y tienen derivadas continuas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$

sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ y si, además, las funciones $X[\varphi(t), \psi(t)]$ e $Y[\varphi(t), \psi(t)]$ son continuas como funciones de t en este segmento entonces existen los límites

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta x_i &= \int X(x, y) dx, \\ \lim_{\Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta y_i &= \int Y(x, y) dy, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

donde $\bar{x}_i$ e $\bar{y}_i$ son las coordenadas de cierto punto del arco Δs_i . Estos límites no dependen del modo de dividir la curva L en arcos parciales Δs_i , cuando $\Delta s_i \rightarrow 0$, ni de la elección del punto $M_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ en el arco Δs_i . Estos límites se llaman *integrales curvilíneas* y se representan así:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta x_i &= \int_L X(x, y) dx, \\ \lim_{\Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta y_i &= \int_L Y(x, y) dy. \end{aligned}$$

Observación. Del teorema citado se deduce que hacia un mismo límite (es decir, hacia la integral curvilínea) tienden las sumas, definidas en el párrafo anterior donde los puntos $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ son los extremos del arco Δs_i , siendo arbitrario el sistema de división de L en los arcos parciales Δs_i .

El teorema formulado da la posibilidad de obtener el método para calcular las integrales curvilíneas.

Así, según la definición, tenemos:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta x_i, \quad (3)$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}).$$

Transformemos la última diferencia según la fórmula de Lagrange:

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i) \Delta t_i,$$

donde τ_i es cierto valor de t comprendido entre los valores t_{i-1} y t_i . Puesto que el punto $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ en el arco Δs_i es arbitrario, elijámoslo de modo que sus coordenadas correspondan al valor del parámetro τ_i :

$$\bar{x}_i = \varphi(\tau_i), \quad \bar{y}_i = \psi(\tau_i).$$

Poniendo en la fórmula (3) los valores obtenidos de $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ y Δx_i ,

obtenemos:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X[\varphi(\tau_i) \psi(\tau_i)] \varphi'(\tau_i) \Delta t_i.$$

El segundo miembro es el límite de una suma integral para la función continua de una sola variable $X[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t)$ en el segmento $[\alpha, \beta]$.

Por consiguiente, este límite es igual a la integral definida de esta función:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Análogamente, obtenemos la fórmula:

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt.$$

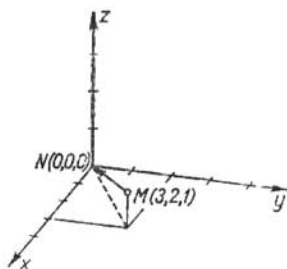


Fig. 329

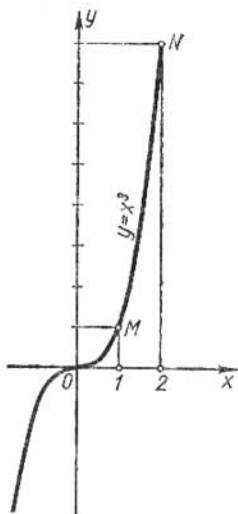


Fig. 330

Sumando miembro a miembro estas igualdades, obtenemos:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Y[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t)\} dt. \quad (4)$$

Esta es la fórmula buscada para calcular una integral curvilínea.

De manera análoga se calcula la integral curvilínea

$$\int X dx + Y dy + Z dz$$

a lo largo de una curva en el espacio, dada por las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

Ejemplo 1. Calcular la integral curvilínea de una terna de funciones: x^3 ; $3zy^2$; $-x^2y$ (o, que es lo mismo, de la función vectorial $x^3i + 3zy^2j - x^2yk$) a lo largo de un segmento de la recta que parte del punto $M(3, 2, 1)$ al punto $N(0, 0, 0)$ (fig. 329).

Solución. Para hallar las ecuaciones paramétricas de la línea MN a lo largo de la cual se debe realizar la integración, escribamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1};$$

designando por t el valor común de todas estas razones, obtenemos las ecuaciones de la recta en forma paramétrica:

$$x = 3t, \quad y = 2t, \quad z = t.$$

Es evidente, que al origen del segmento MN corresponde el valor del parámetro $t = 1$ y al extremo, el valor de $t = 0$. No es difícil hallar las derivadas de x , y , z respecto al parámetro t (las que necesitaremos para calcular la integral curvilínea):

$$x'_t = 3, \quad y'_t = 2, \quad z'_t = 1.$$

Ahora podemos calcular la integral curvilínea buscada con ayuda de la fórmula (4):

$$\begin{aligned} & \int_{(M)}^{(N)} x^3 dx + 3xy^2 dy - x^2y dz = \\ &= \int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t \cdot 1] dt = \int_1^0 87t^3 dt = -\frac{87}{4}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Calcular la integral curvilínea de un par de funciones: $6x^2y$; $10xy^2$, a lo largo de la curva plana $y = x^3$ entre los puntos $M(1, 1)$ y $N(2, 8)$ (fig. 330).

Solución. Para calcular la integral buscada

$$\int_{(M)}^{(N)} 6x^2y dx + 10xy^2 dy$$

hacen falta las ecuaciones paramétricas de la curva dada. Pero, la ecuación de la curva $y = x^3$ dada explícitamente, es un caso particular de la ecuación paramétrica: aquí, la abscisa x del punto de la curva sirve de parámetro y las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$x = x, \quad y = x^3.$$

El parámetro x varía de $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. Es fácil calcular las derivadas respecto al parámetro:

$$x'_x = 1, \quad y'_x = 3x^2.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} & \int_{(M)}^{(N)} 6x^2y dx + 10xy^2 dy = \int_1^2 [6x^2x^3 \cdot 1 + 10xx^6 \cdot 3x^2] dx = \\ &= \int_1^2 (6x^5 + 30x^9) dx = [x^6 + 3x^{10}]_1^2 = 1084. \end{aligned}$$

Mostremos, ahora, algunas aplicaciones de la integral curvilínea.

1. La expresión del área de un dominio, limitado por una curva limitada, en función de una integral curvilínea.

Sea dado en el plano Oxy un dominio D limitado por un contorno L tal que toda paralela a uno cualquiera de los ejes de coordenadas y que pasa por algún punto interior del dominio, corte la frontera L no más que en dos puntos (es decir, el dominio D es regular) (fig. 331).

Supongamos que el segmento $[a, b]$ es la proyección del dominio D sobre el eje Ox ; abajo D está limitado por la curva (l_1) :

$$y = y_1(x)$$

y encima, por la (l_2) :

$$y = y_2(x), \quad [y_1(x) \leq y_2(x)].$$

Entonces, el área del dominio D es igual a:

$$S = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx.$$

Pero, la primera integral es una integral curvilínea a lo largo de la curva l_2 ($\widehat{MPN}$) puesto que $y = y_2(x)$ es la ecuación de esta curva; por tanto:

$$\int_a^b y_2(x) dx = \int_{MPN} y dx.$$

La segunda integral es una integral curvilínea a lo largo de la curva l_1 ($\widehat{MQN}$), es decir:

$$\int_a^b y_1(x) dx = \int_{MQN} y dx.$$

En virtud de la propiedad 1 de la integral curvilínea, tenemos:

$$\int_{MPN} y dx = - \int_{NPM} y dx.$$

Por consiguiente,

$$S = - \int_{NPM} y dx - \int_{MQN} y dx = - \int_L y dx. \quad (5)$$

Tengamos en cuenta que la curva L se recorre en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

Si una parte de la frontera L constituye un segmento M_1M , paralelo al eje Oy , entonces $\int_{(M_1)}^{(M)} y dx = 0$, y la igualdad (5) es válida también para este caso (fig. 332).

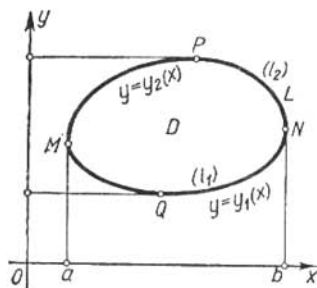


Fig. 331

De modo semejante podemos demostrar que

$$S = \int_L x dy. \quad (6)$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (5) y (6) y dividiendo por dos, obtenemos una fórmula más para calcular el área S :

$$S = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx. \quad (7)$$

Ejemplo 3. Calcular el área de la elipse

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Solución. Según la fórmula (7) hallamos:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t b \cos t - b \sin t (-a \sin t)] dt = \pi ab.$$

Notemos que la fórmula (7), así como las fórmulas (5) y (6), son válidas también para las áreas de dominios cuyas fronteras se cortan por las paralelas a los ejes de coordenadas en más de dos puntos (fig. 333). Para demostrarlo, dividamos el dominio dado (fig. 333) en dos dominios regulares mediante la línea l^* . La fórmula (7) es válida en cada dominio.

Sumando miembro a miembro, obtenemos en el primer miembro el área del dominio dado y en el segundo, la integral curvilínea (con el coeficiente $\frac{1}{2}$) tomada a lo largo de

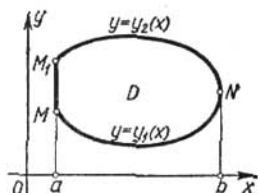


Fig. 332

toda la frontera, puesto que la integral indicada a lo largo de la línea de división l^* se toma dos veces: una vez en el sentido directo, y otra, en el sentido inverso, por lo cual es igual a cero.

2. Cálculo del trabajo producido por una fuerza variable F en una trayectoria curvilínea L .

Ya hemos indicado al principio del § 1 que el trabajo de una fuerza $F = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$ a lo largo de una curva $L = MN$ es igual a la integral curvilínea:

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz.$$

Analicemos un ejemplo concreto del cálculo del trabajo de una fuerza.

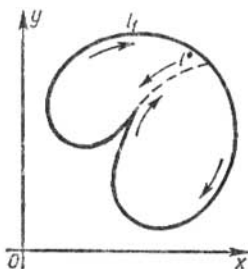


Fig. 333

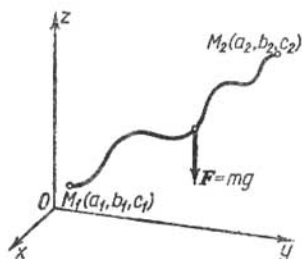


Fig. 334

Ejemplo 4. Calcular el trabajo A de la fuerza de gravedad F durante el desplazamiento de masa m del punto $M_1(a_1, b_1, c_1)$ al punto $M_2(a_2, b_2, c_2)$ a lo largo de una trayectoria arbitraria L (fig. 334).

Solución. Las proyecciones de la fuerza de gravedad F sobre los ejes de coordenadas son:

$$X = 0, Y = 0, Z = -mg.$$

Por tanto, el trabajo buscado es:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X dx + Y dy + Z dz = \int_{c_1}^{c_2} (-mg) dz = mg(c_1 - c_2).$$

Como se ve, en este caso la integral curvilínea no depende de la trayectoria de integración, sino solamente de las posiciones de los puntos inicial y final. Hablando con mayor precisión, el trabajo de la fuerza de gravedad depende sólo de la diferencia en alturas ocupadas por el punto inicial y por el final.

§ 3. FORMULA DE GREEN

Determinemos la relación entre la integral doble extendida por un dominio plano D y la integral curvilínea a lo largo de la frontera L de este dominio.

Supongamos que en el plano Oxy está dado un dominio D regular tanto en la dirección de Ox , como Oy , limitado por un contorno cerrado L (fig. 331). Sea este dominio limitado abajo por la curva $y = y_1(x)$ y encima, por la curva $y = y_2(x)$, $y_1(x) \leq y_2(x)$ ($a \leq x \leq b$).

En conjunto estas dos curvas forman el contorno cerrado L . Sean dadas en el dominio D dos funciones continuas $X(x, y)$ y $Y(x, y)$, que tienen derivadas parciales continuas. Examinemos la integral

$$\iint_D \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} dx dy.$$

Representándola en la forma de la integral iterada de segundo orden, obtenemos:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dX}{dy} dx dy &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{dX}{dy} dy \right) dx = \int_a^b X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b [X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))] dx. \quad (1) \end{aligned}$$

Notemos que la integral

$$\int_a^b X(x, y_2(x)) dx$$

es numéricamente igual a la integral curvilínea

$$\int_{(MPN)} X(x, y) dx,$$

a lo largo de la curva MPN , cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = x, \quad y = y_2(x),$$

donde x es el parámetro.

De este modo,

$$\int_a^b X(x, y_2(x)) dx = \int_{MPN} X(x, y) dx. \quad (2)$$

Análogamente, la integral

$$\int_a^b X(x, y_1(x)) dx$$

es numéricamente igual a la integral curvilínea a lo largo del arco MQN

$$\int_a^b X(x, y_1(x)) dx = \int_{(MQN)} X(x, y) dx. \quad (3)$$

Sustituyendo las expresiones (2) y (3) en la fórmula (1), obtenemos:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_{MPN} X(x, y) dx - \int_{MQN} X(x, y) dx. \quad (4)$$

Pero,

$$\int_{MQN} X(x, y) dx = - \int_{NQM} X(x, y) dx$$

(véase § 1, propiedad 1). Por consiguiente, podemos escribir la fórmula (4) en la forma:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_{MPN} X(x, y) dx + \int_{MQN} X(x, y) dx.$$

Pero, la suma de las integrales curvilíneas del segundo miembro es igual a la integral curvilínea a lo largo de toda la curva cerrada L en sentido del movimiento de las agujas del reloj. Por tanto, la última igualdad puede ser reducida a la forma:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_L X(x, y) dx. \quad (5)$$

L (según las agujas del reloj)

Si una parte de la frontera está representada por un segmento l_3 , paralelo al eje Oy , entonces tenemos $\int_{l_3} X(x, y) dx = 0$ y la ecuación (5) permanece válida también para este caso.

De manera igual hallamos:

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy = - \int_L Y(x, y) dy \quad (6)$$

L (según las agujas del reloj)

Restando (6) de (5), obtenemos:

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy.$$

L (según las agujas del reloj)

Si el sentido del recorrido del contorno L es inverso al movimiento de las agujas de un reloj, tenemos *):

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy.$$

Esta es así llamada *fórmula de Green* por nombre de físico y matemático inglés D. Green (1793—1841) **).

*) Si en una integral curvilínea por un contorno cerrado L no está indicado el sentido del recorrido, se supone que esto se efectúa a la dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj. Se hacen referencias especiales, si el recorrido está realizado en el sentido de las agujas del reloj.

**) Esta fórmula es un caso particular de una fórmula más general, obtenida por el matemático ruso M. V. Ostrogradski.

Hemos supuesto que el dominio D es regular. Pero, igual que en el problema del área (véase § 2) se puede demostrar que esta fórmula es válida para cualquier dominio que podemos dividir en los dominios regulares.

§ 4. CONDICIONES PARA QUE UNA INTEGRAL CURVILINEA NO DEPENDA DE LA TRAYECTORIA DE INTEGRACION

Examinemos la integral curvilínea

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy,$$

a lo largo de una curva plana L que une los puntos M y N . Supongamos que las funciones $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas en el dominio examinado D . Aclaremos las condiciones en las cuales la integral curvilínea no depende de la forma de la curva L , sino de la posición de los puntos M y N . Analicemos dos curvas arbitrarias, MPN y MQN del dominio examinando D que unen los puntos M y N (fig. 335).

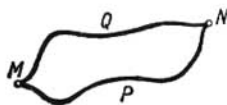


Fig. 335

Sea:

$$\int_{MPN} X dx + Y dy = \int_{MQN} X dx + Y dy, \quad (1)$$

es decir,

$$\int_{MPN} X dx + Y dy - \int_{MQN} X dx + Y dy = 0.$$

Luego, en virtud de las propiedades 1 y 2 de las integrales curvilíneas (§ 1) tenemos:

$$\int_{MPN} X dx + Y dy + \int_{NQM} X dx + Y dy = 0,$$

es decir, la integral curvilínea a lo largo del contorno cerrado L es:

$$\int_L X dx + Y dy = 0.$$

En esta última fórmula la integral curvilínea está tomada a lo largo de un contorno cerrado L , compuesto de las curvas MPN y NQM . Es evidente que podemos considerar este contorno L como arbitrario.

Por consiguiente, si tenemos la condición de que la integral curvilínea no depende de la forma de la curva que une los dos puntos arbitrarios M y N , sino de la posición de éstos, resulta que esta integral a lo largo del contorno cerrado cualquiera es nula.

La conclusión recíproca también es válida: si la integral curvilínea a lo largo de cualquier contorno cerrado es nula, ésta no depende de la forma de la curva que une los dos puntos arbitrarios, sino sólo de la posición de estos puntos. En efecto, de la igualdad (2) se deduce la (1).

En el ejemplo 4, § 2, la integral curvilínea no depende de la trayectoria de integración. En cambio, en el ejemplo 3 la integral curvilínea depende de la trayectoria de integración, puesto que la integral a lo largo del contorno cerrado no es nula, sino da el área limitada por este contorno.

En los ejemplos 1 y 2 las integrales curvilíneas también dependen de la trayectoria de integración.

Naturalmente surge la pregunta: a qué condiciones deben satisfacer las funciones $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ para que la integral curvilínea $\int X dx + Y dy$ a lo largo de cualquier contorno cerrado sea nula. El teorema siguiente da la respuesta:

Teorema. Sean $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ las dos funciones continuas en todos los puntos de cierto dominio D , igual que sus derivadas parciales, $\frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$ y $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$. Para que la integral curvilínea a lo largo de un contorno L cerrado cualquiera de este dominio sea nula, es decir, para que

$$\int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0 \quad (2)$$

es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (3)$$

en todos los puntos del dominio D .

Demostración. Examinemos un contorno cerrado arbitrario L en el dominio D y escribamos la fórmula de Green correspondiente a este contorno:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy.$$

Si la condición (3) se cumple, la integral doble del primer miembro es idénticamente igual a cero y, por consiguiente:

$$\int_L X dx + Y dy = 0.$$

Queda así demostrado que la condición (3) es suficiente.

Demostremos ahora que esta condición es también **necesaria**, o sea, si la igualdad (2) se cumple para cualquier curva cerrada L de D , entonces la condición (3) se satisface obligatoriamente en cada punto de este dominio.

Supongamos lo contrario: que se cumple la igualdad (2)

$$\int_L X dx + Y dy = 0,$$

y no se cumple la condición (3), es decir:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0,$$

aunque sea en un solo punto. Sea, por ejemplo, la desigualdad en cierto punto $P(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0.$$

Como la función en el primer miembro es continua, ella es positiva y mayor que cierto número $\delta > 0$ en todos los puntos de un dominio D' , suficientemente pequeño que contiene el punto $P(x_0, y_0)$. Tomemos la integral doble de la diferencia

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

por este dominio D' . Por supuesto, ella es positiva. En efecto:

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy > \iint_{D'} \delta dx dy = \delta \iint_{D'} dx dy = \delta D' > 0.$$

Pero, según la fórmula de Green, el primer miembro de la última desigualdad es igual a la integral curvilínea a lo largo de la frontera L' del dominio D' , esta integral, según la hipótesis, es nula. Por consiguiente, la última desigualdad contradice a la condición (2)

y la suposición, de que la diferencia $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ sea distinta de cero, aunque en un solo punto, es falsa. De aquí se deduce que

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

en todos los puntos del dominio dado D .

El teorema queda, pues, completamente demostrado.

En el § 9, cap. XIII (tomo II) hemos demostrado que el cumplimiento de la condición

$$\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$$

significa que la expresión $X dx + Y dy$ es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, es decir:

$$X dx + Y dy = du(x, y),$$

siendo:

$$X(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pero, en este caso el vector

$$F = Xi + Yj = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

es el gradiente de la función $u(x, y)$; la función $u(x, y)$, cuyo gradiente es igual al vector $Xi + Yj$, se llama *potencial* de este vector.

Demostremos que en este caso la integral curvilínea $I = \int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy$ a lo largo de cualquier curva L , que une los puntos M y N , es igual a la diferencia de los valores de la función u en estos puntos:

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy = \int_{(M)}^{(N)} du(x, y) = u(N) - u(M).$$

Demostración. Si $X dx + Y dy$ es la diferencial total de la función $u(x, y)$, entonces $X = \frac{\partial u}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ y la integral curvilínea toma la forma:

$$I = \int_{(M)}^{(N)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Para calcular esta integral escribamos las ecuaciones paramétricas de la curva L que une los puntos M y N :

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Supongamos que al valor $t = t_0$ del parámetro corresponde el punto M y al valor $t = T$, el punto N . Luego, la integral curvilínea se reduce a la siguiente integral definida:

$$I = \int_{t_0}^T \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right] dt.$$

La expresión entre los corchetes es una función de t , al mismo tiempo

esta función es la derivada total de la función $u[\varphi(t), \psi(t)]$ respecto a t . Por consiguiente:

$$I = \int_{t_0}^T \frac{\partial u}{\partial t} dt = u[\varphi(t), \psi(t)] \Big|_{t_0}^T = \\ = u[\varphi(T), \psi(T)] - u[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = u(N) - u(M).$$

Como vemos, la integral curvilínea de una diferencial total no depende de la forma de la curva, a la largo de la cual se efectúa la integración.

La integral curvilínea a lo largo de una curva en el espacio tiene las mismas propiedades (véase § 7 de este capítulo).

Observación. A veces tenemos que analizar las integrales curvilíneas de una cierta función $X(x, y)$ a lo largo de la longitud del arco L :

$$\int_L X(x, y) ds = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(x_i, y_i) \Delta s_i, \quad (4)$$

donde ds es la diferencial del arco. Tales integrales se calculan de un modo análogo al usado para las integrales curvilíneas examinadas arriba. Supongamos que la curva L está dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

donde $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ son las funciones continuas de t .

Sean α y β los valores del parámetro t , correspondientes al origen y al extremo final del arco L .

Como es

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt,$$

obtenemos fórmula para calcular la integral (4):

$$\int_L X(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

Podemos examinar la integral curvilínea a lo largo del arco de una curva en el espacio $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$:

$$\int_L X(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt.$$

Con ayuda de las integrales curvilíneas a lo largo del arco podemos determinar, por ejemplo, las coordenadas de los centros de gravedad de diferentes líneas.

Razonando análogamente que en el § 8, cap. XII (tomo I) obtenemos la fórmula para calcular las coordenadas del centro de gravedad de una curva en el espacio:

$$x_c = \frac{\int_L x ds}{\int_L ds}, \quad y_c = \frac{\int_L y ds}{\int_L ds}, \quad z_c = \frac{\int_L z ds}{\int_L ds}. \quad (5)$$

Ejemplo. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una espira de un hélice

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (0 \leq t < 2\pi),$$

si su densidad lineal es constante.

Solución. Aplicando la fórmula (5), encontramos:

$$x_c = \frac{\int_0^{2\pi} a \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt} = \frac{\int_0^{2\pi} a \cos t \sqrt{a^2 + b^2} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt} = \frac{a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot 0}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

Análogamente, $y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi} bt \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b \cdot 4\pi^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}} = \pi b.$$

Así, las coordenadas del centro de gravedad de una espira del hélice son:

$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = \pi b.$$

§ 5. INTEGRAL DE SUPERFICIE

Sea dado en el sistema de coordenadas rectangulares $Oxyz$ un dominio V y sea σ una superficie limitada por una curva λ en el espacio.

Respecto a la superficie σ , supongamos que en cada su punto P la dirección positiva de la normal se determina por el vector unitario $n(P)$, cuyos cosenos directores son funciones continuas de las coordenadas de los puntos de la superficie.

Supongamos que en cada punto de la superficie está determinado un vector

$$F = X(x, y, z) i + Y(x, y, z) j + Z(x, y, z) k,$$

donde X, Y, Z , son las funciones continuas de las coordenadas. Dividamos arbitrariamente la superficie en los dominios o áreas elementales $\Delta\sigma_i$. En cada una de estas áreas tomemos un punto

arbitrario P_i y formemos la suma

$$\sum_i (F(P_i) \cdot n(P_i)) \Delta\sigma_i, \quad (1)$$

donde:

$F(P_i)$ es el valor del vector F en el punto P_i del área elemental $\Delta\sigma_i$, $n(P_i)$ es el vector unitario de la normal en este punto; $F \cdot n$ es el producto escalar de estos vectores.

El límite de la suma (1), extendida por todas las áreas $\Delta\sigma_i$, cuando los diámetros de todas estas áreas tienden a cero, se llama *integral de superficie* y se designa por el símbolo

$$\iint_{\sigma} F \cdot n \, d\sigma.$$

Así, según la definición *) tenemos:

$$\lim_{\text{diám } \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum F_i n_i \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} F \cdot n \, d\sigma. \quad (2)$$

Cada término de la suma (1):

$$F_i n_i \Delta\sigma_i = F_i \Delta\sigma_i \cos(n_i, F_i) \quad (3)$$

tiene la siguiente interpretación mecánica: este producto es igual al volumen de un cilindro de base $\Delta\sigma_i$ y altura $F_i \cos(n_i, F_i)$. Si el vector F es la velocidad de un líquido que corre por la superficie σ , el producto (3) es igual a la cantidad del líquido que pasa por $\Delta\sigma_i$ en una unidad de tiempo, en la dirección del vector n_i (fig. 336).

Si F es el vector de velocidad del líquido en un punto dado, la expresión $\iint_{\sigma} F \cdot n \, d\sigma$ designa la cantidad total de líquido que corre por la superficie σ en la dirección positiva en una unidad de tiempo. Por eso, la integral de superficie (2) se llama, también, *flujo del campo vectorial F a través de la superficie σ* .

De la definición de integral de superficie se deduce que si dividimos la superficie σ en las partes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ obtenemos:

$$\iint_{\sigma} F \cdot n \, d\sigma = \iint_{\sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \iint_{\sigma_2} F \cdot n \, d\sigma + \dots + \iint_{\sigma_k} F \cdot n \, d\sigma.$$

Representemos el vector unitario n mediante sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas:

$$n = \cos(n, x) i + \cos(n, y) j + \cos(n, z) k.$$

*) Si la superficie σ es tal que en cada uno de sus puntos un plano tangente varía continuamente su posición en función del desplazamiento del punto P por la superficie, y si la función vectorial F es continua en esta superficie, entonces este límite existe (admitamos sin demostración este teorema de la existencia de las integrales de superficie).

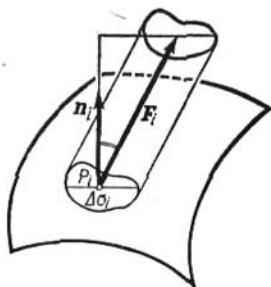


Fig. 336

Poniendo en la integral (2) expresiones de los vectores de F y n en función de sus proyecciones, obtenemos:

$$\iint_{\sigma} F n d\sigma = \iint_{\sigma} [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)] d\sigma. \quad (2')$$

El producto $\Delta\sigma \cos(n, z)$ es la proyección del área elemental $\Delta\sigma$ sobre el plano Oxy (fig. 337); afirmación análoga es válida también para otros productos

$$\begin{aligned} \Delta\sigma \cos(n, x) &= \Delta\sigma_{yz}, & \Delta\sigma \cos(n, y) &= \Delta\sigma_{xz}, \\ & & \Delta\sigma \cos(n, z) &= \Delta\sigma_{xy}, \end{aligned} \quad (4)$$

donde $\Delta\sigma_{yz}$, $\Delta\sigma_{xz}$, $\Delta\sigma_{xy}$ son las proyecciones de área elemental $\Delta\sigma$ sobre los planos de coordenadas correspondientes.

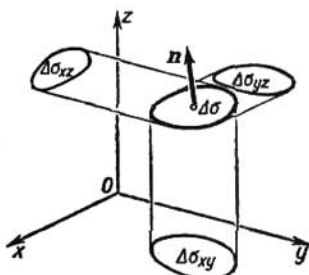


Fig. 337

En virtud de lo expuesto, la integral (2') podemos escribir también en la forma:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} F n d\sigma &= \iint_{\sigma} [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)] d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} X dy dz + Y dz dx + Z dx dy. \end{aligned} \quad (2'')$$

§ 6. CALCULO DE LA INTEGRAL DE SUPERFICIE

El cálculo de una integral por una superficie curvada se reduce al cálculo de una integral doble por un dominio plano.

Indiquemos, por ejemplo, un procedimiento del cálculo de la integral

$$\iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma.$$

Supongamos que la superficie σ es tal que toda paralela al eje Oz la corta en un solo punto. Por tanto, podemos escribir la ecuación

de la superficie en la forma:

$$z = f(x, y).$$

Designando por D la proyección de la superficie σ sobre el plano Oxy , obtenemos (en virtud de la definición de la integral de superficie):

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma = \lim_{\text{diám } \Delta \sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, z_i) \cos(n_i, z) \Delta \sigma_i.$$

Tomando en cuenta la última de las fórmulas (4) § 5, obtenemos:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma &= \lim_{\text{diám } \Delta \sigma_{xy} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) (\Delta \sigma_{xy})_i = \\ &= \pm \lim_{\text{diám } \Delta \sigma \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) |\Delta \sigma_{xy}|_i, \end{aligned}$$

la última expresión es una suma integral para la integral doble de la función $Z(x, y, f(x, y))$ por el dominio D . Por consiguiente:

$$\iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma = \pm \iint_D Z(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

El signo «más» delante de la integral doble se pone, cuando $\cos(n, z) \geq 0$, y el signo «menos», cuando $\cos(n, z) \leq 0$.

Si la superficie σ no satisface a la condición indicada al principio de este párrafo, entonces, es preciso dividirla en partes, que le satisfagan a esta condición, y calcular la integral por cada parte separadamente.

De modo análogo calculamos las integrales

$$\iint_{\sigma} X \cos(n, x) d\sigma; \quad \iint_{\sigma} Y \cos(n, y) d\sigma.$$

Lo demostrado anteriormente justifica la expresión de una integral de superficie en la forma (2'') § 5. El segundo miembro de la igualdad (2'') se puede considerar como una suma de integrales dobles por las proyecciones correspondientes del dominio σ . Los signos de estas integrales dobles (o sea, los signos de los productos $dy dz$, $dx dz$, $dx dy$) se toman de acuerdo con la regla indicada arriba.

Ejemplo 1. Sea σ una superficie cerrada tal que toda paralela al eje Oz la corta no más que en dos puntos.

Examinemos la integral

$$\iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma.$$

Tomemos la normal exterior por la dirección positiva de la normal. En el caso dado podemos dividir la superficie en dos partes, inferior y superior, de

ecuaciones correspondientes:

$$z = f_1(x, y) \text{ y } z = f_2(x, y).$$

Designemos por D la proyección de σ sobre el plano Oxy (fig. 338); entonces:

$$\iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma = \iint_D f_2(x, y) dx dy - \iint_D f_1(x, y) dx dy.$$

La segunda integral tiene el signo «menos» puesto que en la integral de superficie el signo del producto $dx dy$ en la superficie $z = f_1(x, y)$ debe tomarse negativo, siendo negativo $\cos(n, z)$ para esta superficie.

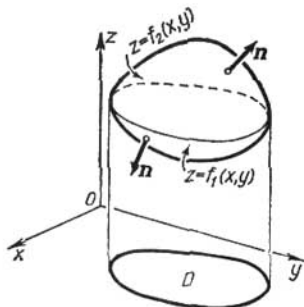


Fig. 338

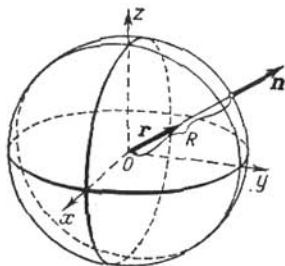


Fig. 339

Pero, la diferencia de las integrales del segundo miembro de la última fórmula representa el volumen limitado por la superficie σ . Entonces el volumen de un cuerpo, limitado por la superficie cerrada σ , es igual a la siguiente integral de superficie:

$$V = \iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma.$$

Ejemplo 2. Una carga eléctrica positiva e , colocada en el origen de coordenadas, genera un campo vectorial tal que, según la ley de Coulomb, en cada punto del espacio se determina el vector F :

$$F = k \frac{e}{r^2} r,$$

donde r es la distancia del punto examinado al origen de coordenadas; r es el vector unitario dirigido a lo largo del radio vector del punto dado (fig. 339); k es un factor constante.

Determinar el flujo del campo vectorial a través de una esfera de radio R y centro en el origen de coordenadas.

Solución. Tomando en cuenta que $r = R = \text{const}$, tenemos:

$$\iint_{\sigma} k \frac{e}{r^2} r n d\sigma = \frac{ke}{R^2} \iint_{\sigma} r n d\sigma.$$

Pero, la última integral es igual al área de la superficie σ . En efecto, según

a definición de integral (teniendo en cuenta que $r\mathbf{n} = 1$), obtenemos:

$$\iint_{\sigma} r\mathbf{n} d\sigma = \lim_{\Delta\sigma_k \rightarrow 0} \sum r_k n_k \Delta\sigma_k = \lim_{\Delta\sigma_k \rightarrow 0} \sum \Delta\sigma_k = \sigma.$$

Por tanto, el flujo buscado es $\frac{ke}{R^2} \sigma = \frac{ke}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke$.

§ 7. FORMULA DE STOKES

Supongamos que tenemos superficie σ tal, que toda paralela al eje Oz la corta en un solo punto. Designemos por λ la frontera de σ . Tomemos la dirección positiva de la normal $\mathbf{n}$ de modo tal que ésta forme con la dirección positiva del eje Oz un ángulo agudo (fig. 340).

Sea $z = f(x, y)$ la ecuación de la superficie. Los cosenos directores de la normal se expresan mediante las fórmulas (véase § 6, cap. IX, tomo I):

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\ \cos(n, y) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\ \cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Supongamos que todos los puntos de σ pertenecen a un cierto dominio V . Sea dada en el dominio V una función continua $X(x, y, z)$, siendo continuas, también, sus derivadas parciales de primer orden, examinemos la integral curvilínea a lo largo de la curva λ

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx.$$

En la curva λ tenemos la igualdad $z = f(x, y)$, donde x e y son las coordenadas de los puntos de la línea L que es la proyección de λ sobre el plano Oxy (fig. 340). Por consiguiente, podemos escribir la igualdad

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx = \int_L X(x, y, f(x, y)) dx. \quad (2)$$

La última integral es curvilínea a lo largo de L . Transformémosla según la fórmula de Green, haciendo:

$$X(x, y, f(x, y)) = \bar{X}(x, y), \quad 0 = \bar{Y}(x, y).$$

Sustituyendo en la fórmula de Green $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ por sus expresiones, obtenemos:

$$-\iint_D \frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} dx dy = \int_L X(x, y, f(x, y)) dx, \quad (3)$$

donde el dominio D está limitado por la curva L . A base de la derivada de la función compuesta $X(x, y, f(x, y))$ en la que y entra tanto directamente, como mediante la función $z = f(x, y)$, hallemos:

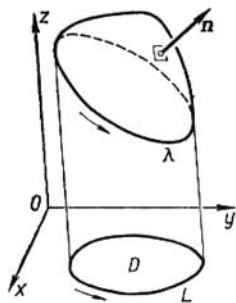


Fig. 340

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} &= \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Sustituyendo la expresión (4) en el primer miembro de (3), obtenemos:

$$\begin{aligned} -\iint_D \left[\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right] dx dy &= \\ &= \int_L X(x, y, f(x, y)) dx. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la igualdad (2), se puede escribir la última ecuación en la forma:

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) dx = -\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy - \iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy. \quad (5)$$

Las dos últimas integrales se transforman en las integrales de superficie. Efectivamente, de la fórmula (2''), § 5 se deduce que, si tenemos una cierta función $A(x, y, z)$, se verifica la igualdad:

$$\iint_{\sigma} A(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma = \iint_D A dx dy.$$

En virtud de esta igualdad, las integrales del segundo miembro de

la igualdad (5) se transforman del modo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy &= \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y} \cos(n, z) d\sigma, \\ \iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, z) d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Transformemos la última integral empleando las fórmulas (1) del párrafo presente: dividiendo miembro a miembro la segunda de estas igualdades por la tercera, hallamos:

$$\frac{\cos(n, y)}{\cos(n, z)} = - \frac{\partial f}{\partial y},$$

o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, z) = -\cos(n, y).$$

Por consiguiente,

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z} \cos(n, y) d\sigma. \quad (7)$$

Poniendo las expresiones (6) y (7) en la ecuación (5), obtenemos:

$$\int_\lambda X(x, y, z) dx = - \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y} \cos(n, z) d\sigma + \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z} \cos(n, y) d\sigma. \quad (8)$$

El sentido del recorrido del contorno λ debe ser acordado con la dirección elegida de la normal positiva n . Es decir, si un observador mira desde el extremo de la normal, él ve que el recorrido a lo largo de λ se realiza contra el movimiento de las agujas del reloj.

La fórmula (8) es válida para toda superficie, siempre y cuando puede dividirse en partes, cuyas ecuaciones tengan la forma $z = f(x, y)$.

Análogamente, podemos escribir las fórmulas:

$$\int_\lambda Y(x, y, z) dy = \iint_\sigma \left[-\frac{\partial Y}{\partial z} \cos(n, x) + \frac{\partial Y}{\partial x} \cos(n, z) \right] d\sigma, \quad (8')$$

$$\int_\lambda Z(x, y, z) dz = \iint_\sigma \left[-\frac{\partial Z}{\partial x} \cos(n, y) + \frac{\partial Z}{\partial y} \cos(n, x) \right] d\sigma. \quad (8'')$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (8), (8'), (8''), obtenemos la fórmula:

$$\int X dx + Y dy + Z dz = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(n, z) + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(n, y) \right] d\sigma. \quad (9)$$

Esta es así llamada *fórmula de Stokes* [físico y matemático inglés D. Stokes (1819—1903)].

Esta fórmula establece la dependencia entre la integral de superficie σ y la integral curvilínea a lo largo de la frontera λ de σ , siendo recorrida λ según la regla indicada arriba.

El vector B determinado por las proyecciones

$$B_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

se llama *rotacional* de la función vectorial $F = Xi + Yj + Zk$ y se designa por el símbolo $\text{rot } F$.

Por tanto, en fórmula vectorial la fórmula (9) toma la forma:

$$\int_{\lambda} F ds = \iint_{\sigma} n \text{ rot } F d\sigma, \quad (9)$$

y podemos enunciar el teorema de Stokes así.

La circulación de un vector a lo largo de un contorno cerrado que limita una superficie es igual al flujo de su rotacional a través de esta superficie.

Observación. Si la superficie σ es una parte del plano, paralelo al Oxy , entonces $\Delta z = 0$, y obtenemos ya la fórmula de Green, como caso particular de la de Stokes.

De la fórmula (9) se deduce que si

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

la integral curvilínea a lo largo de toda curva cerrada λ en el espacio es nula:

$$\int_{\lambda} X dx + Y dy + Z dz = 0. \quad (11)$$

Entonces, podemos decir que aquí la integral curvilínea no depende de la forma de la curva de integración.

Igual que en el caso de una curva plana podemos mostrar que, para el cumplimiento de la igualdad (11), las condiciones (10) no sólo son suficientes, sino también necesarias.

Después de satisfacer estas condiciones, el elemento de integración es la diferencial total de cierta función $u(x, y, z)$:

$$X dx + Y dy + Z dz = du(x, y, z)$$

y, por tanto,

$$\int_{(M)}^{(N)} X dx + Y dy + Z dz = \int_{(M)}^{(N)} du = u(N) - u(M).$$

Esto se demuestra igual que la fórmula correspondiente para una función de dos variables (véase § 4).

Ejemplo 1. Escribamos las ecuaciones fundamentales de la dinámica de un punto material:

$$m \frac{dv_x}{dt} = X; \quad m \frac{dv_y}{dt} = Y; \quad m \frac{dv_z}{dt} = Z.$$

Aquí, m es la masa del punto; X, Y, Z son proyecciones sobre los ejes de coordenadas de la fuerza aplicada al punto;

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

son proyecciones de la velocidad v sobre los ejes de coordenadas. Multipliquemos los dos miembros de las ecuaciones escritas por las expresiones

$$v_x dt = dx, \quad v_y dt = dy, \quad v_z dt = dz.$$

Al sumar las igualdades miembro a miembro, obtenemos:

$$m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = X dx + Y dy + Z dz;$$

$$m \frac{1}{2} d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = X dx + Y dy + Z dz.$$

Puesto que $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, podemos escribir:

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = X dx + Y dy + Z dz.$$

Calculemos la integral a lo largo de la trayectoria que une los puntos M_1 y M_2 :

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X dx + Y dy + Z dz,$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades en los puntos M_1 y M_2 .

La última igualdad expresa el teorema de las fuerzas vivas: el incremento de la energía cinética durante el paso de un punto al otro es igual al trabajo de la fuerza que actúa sobre la masa m .

Ejemplo 2. Determinar el trabajo de la fuerza de atracción newtoniana hacia un centro inmóvil de una masa m durante el desplazamiento de una masa unitaria desde la posición $M_1(a_1, b_1, c_1)$ a la $M_2(a_2, b_2, c_2)$.

Solución. Supongamos que el origen de coordenadas se encuentra en el centro inmóvil de atracción. Designemos por r el radio vector del punto M

(fig. 341) que corresponde a una posición arbitraria de la masa unitaria, y por r^0 , el vector unitario orientado a lo largo del vector r . Entonces

$$\mathbf{F} = -\frac{km}{r^2} \mathbf{r}^0,$$

donde k es la constante universal de gravitación. Las proyecciones de la fuerza $\mathbf{F}$ sobre los ejes de coordenadas son:

$$X = -km \frac{1}{r^2} \frac{x}{r}; \quad Y = -km \frac{1}{r^2} \frac{y}{r},$$

$$Z = -km \frac{1}{r^2} \frac{z}{r}.$$

Luego el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ en la trayectoria M_1M_2 es igual a:

$$\begin{aligned} A &= -km \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3} = \\ &= -km \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{r dr}{r^3} = km \int_{(M_1)}^{(M_2)} d\left(\frac{1}{r}\right), \end{aligned}$$

(puesto que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $r dr = x dx + y dy + z dz$). Designando por r_1 y r_2 las longitudes de radios vectores de los puntos M_1 y M_2 , obtenemos:

$$A = km \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

De modo que, en este caso, la integral curvilínea tampoco depende de la forma de la curva de integración, sino de las posiciones de los puntos inicial y final. La función $u = \frac{km}{r}$ se llama *potencial* del campo de atracción, generado por la masa m . En el caso dado

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$A = u(M_2) - u(M_1),$$

es decir, el trabajo para desplazar la masa unitaria es igual a la diferencia entre los valores de la potencial en los puntos inicial y final.

§ 8. FORMULA DE OSTROGRADSKI

Sea dado en el espacio un dominio regular tridimensional V , limitado por una superficie cerrada σ ; la proyección de V sobre el plano Oxy da el dominio bidimensional regular D . Supongamos que se puede dividir la superficie σ en tres partes σ_1 , σ_2 y σ_3 de modo que las ecuaciones de las dos primeras tengan la forma:

$$z = f_1(x, y) \quad \text{y} \quad z = f_2(x, y),$$

donde $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ son las funciones continuas en el dominio D , y la tercera parte, σ_3 , es una superficie cilíndrica con la generatriz paralela al eje Oz .

Examinemos la integral

$$I = \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz.$$

Al principio, integremos respecto a z :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial Z}{\partial z} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_D Z(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy. \quad (1) \end{aligned}$$

Definamos en la normal a la superficie la dirección determinada, a saber, la dirección que coincide con la de la normal exterior a la superficie σ . Entonces, $\cos(n, z)$ en la superficie σ_2 es positivo, en la σ_1 es negativo y en la superficie σ_3 es nulo.

Las integrales dobles del segundo miembro de la igualdad (1) son iguales a las integrales correspondientes de superficie

$$\begin{aligned} \iint_D Z(x, y, f_2(x, y)) dx dy &= \iint_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma, \quad (2) \\ \iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy &= \iint_{\sigma_1} Z(x, y, z) (-\cos(n, z)) d\sigma. \end{aligned}$$

En la última integral hemos puesto $(-\cos(n, z))$ por que los elementos de las superficies σ_1 y σ_2 y el elemento del área Δs del dominio D están ligados por la correlación $\Delta s = \Delta \sigma [-\cos(n, z)]$, puesto que el ángulo (n, z) es obtuso.

Así,

$$\iint_D Z(x, y, f_1(x, y)) dx dy = - \iint_{\sigma_1} Z(x, y, f_1(x, y)) \cos(n, z) d\sigma. \quad (2')$$

Sustituyendo (2') y (2'') en la igualdad (1), tenemos:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \\ &= \iint_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma. \end{aligned}$$

Para comodidad de los cálculos ulteriores, escribamos la última ecuación en la forma (sumado $\iint_{\sigma_3} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma = 0$, puesto

que en la superficie σ_3 se verifica la igualdad $\cos n_z = 0$):

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \\ &= \iint_{\sigma_2} Z \cos(n, z) d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z \cos(n, z) d\sigma + \iint_{\sigma_3} Z \cos(n, z) d\sigma. \end{aligned}$$

Pero, la suma de las integrales del segundo miembro de la última igualdad es igual a la integral extendida por toda la superficie cerrada σ , por consiguiente:

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma.$$

De un modo semejante, obtenemos las correlaciones:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy dz &= \iint_{\sigma} Y(x, y, z) \cos(n, y) d\sigma, \\ \iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz &= \iint_{\sigma} X(x, y, z) \cos(n, x) d\sigma. \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las tres últimas ecuaciones, obtenemos la fórmula de Ostrogradski *):

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz &= \\ &= \iint_{\sigma} (X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)) d\sigma. \end{aligned} \quad (2)$$

La expresión $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ se llama *divergencia* del vector (o sea, divergencia de la función vectorial)

$$F = Xi + Yj + Zk$$

y se designa por el símbolo $\operatorname{div} F$:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

*) Esta fórmula (llamada también de Ostrogradski — Gauss) fue obtenida por el célebre matemático ruso M. V. Ostrogradski (1801—1861) y publicada por él en 1828 en el artículo «Notas sobre la teoría del calor».

Indiquemos que esta fórmula es válida para todo dominio que puede ser dividido en dominios parciales que satisfacen a las condiciones expuestas al principio del párrafo corriente.

Demos una interpretación hidromecánica de la fórmula obtenida.

Supongamos que $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ es el vector de velocidad de un líquido que corre a través del dominio V . En este caso, la integral de superficie en la fórmula (2) es la integral de la proyección del vector $\mathbf{F}$ sobre la normal exterior $\mathbf{n}$; esta integral da la cantidad del líquido que sale de V a través de la superficie σ en una unidad de tiempo (o que entra en el dominio V , si la integral es negativa). Esta cantidad se expresa mediante la integral triple de $\text{div } \mathbf{F}$.

Si $\text{div } \mathbf{F} \equiv 0$, la integral doble extendida por toda la superficie cerrada es nula, es decir, la cantidad del líquido que sale (o entra) a través de toda la superficie cerrada σ es igual a cero (no hay fuentes). Hablando con mayor precisión, la cantidad del líquido que entra en el interior del dominio es igual a la que sale de éste.

En forma vectorial la fórmula de Ostrogradski se escribe así:

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{F} dv = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \mathbf{n} ds \quad (1)$$

y se anuncia diciendo: *la integral de la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}$, extendida por cierto volumen, es igual al flujo del vector a través de la superficie que limita este volumen.*

§ 9. OPERADOR DE HAMILTON Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

Sea una función $u = u(x, y, z)$. En cada punto del dominio donde está definida y derivada la función $u(x, y, z)$ se determina el gradiente:

$$\text{grad } u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1)$$

El gradiente de la función $u(x, y, z)$ se designa, a veces, de la manera siguiente:

$$\nabla u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z}; \quad (2)$$

el signo ∇ es una delta invertida y se llama «nabla».

1) Es cómodo escribir la ecuación (2) en la forma simbólica:

$$\nabla u = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u \quad (2)$$

y considerar el símbolo

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3)$$

como un «vector simbólico». Este vector simbólico se llama *hamiltoniano* u *operador de Hamilton*, o, simplemente, nabla (∇ — operador). De las fórmulas (2) y (2') se deduce que, al «multiplicar» el vector simbólico ∇ por la función escalar u , obtenemos el gradiente de esta función:

$$\nabla u = \text{grad } u. \quad (4)$$

2) Podemos formar un producto escalar del vector simbólico ∇ por el vector $\mathbf{F} = iX + jY + kZ$:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{F} &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (iX + jY + kZ) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} X + \frac{\partial}{\partial y} Y + \frac{\partial}{\partial z} Z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{F} \end{aligned}$$

(véase el § 8). Así,

$$\nabla \mathbf{F} = \text{div } \mathbf{F}. \quad (5)$$

3) Formemos un producto escalar del vector simbólico ∇ por el vector $\mathbf{F} = iX + jY + kZ$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (iX + jY + kZ) = \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} = \\ &= i \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - j \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + k \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \\ &= i \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \text{rot } \mathbf{F} \end{aligned}$$

(véase el § 7). Así,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F}. \quad (6)$$

De lo expuesto se deduce que el uso del vector simbólico ∇ nos permite expresar las operaciones vectoriales de una manera muy breve. Examinemos unas cuantas fórmulas más.

4) El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = iX + jY + kZ$ se llama *campo vectorial potencial*, si el vector $\mathbf{F}$ es el gradiente de cierta

función escalar $u(x, y, z)$:

$$\mathbf{F} = \text{grad } u,$$

o sea,

$$\mathbf{F} = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z}.$$

En este caso, las proyecciones del vector $\mathbf{F}$ son:

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

De estas igualdades se deduce (véase § 12, cap. VIII, tomo I):

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

ó

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Por consiguiente, para el vector examinado $\mathbf{F}$ tenemos:

$$\text{rot } \mathbf{F} = 0.$$

Así, obtenemos:

$$\text{rot}(\text{grad } u) = 0. \quad (7)$$

Aplicando ∇ — operador, en virtud de las fórmulas (4) y (6), podemos escribir la igualdad (7) así:

$$(\nabla \times \nabla u) = 0. \quad (7')$$

Usando la propiedad de que, para multiplicar un producto vectorial por un escalar es suficiente multiplicar esta magnitud escalar por uno de los factores, escribamos:

$$(\nabla \times \nabla) u = 0. \quad (7'')$$

Aquí, el operador ∇ de nuevo tiene las propiedades de un vector ordinario: el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo.

El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ para que $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ se llama *irrotacional*. De la igualdad (7) se deduce que todo campo potencial es irrotacional.

La conclusión inversa también es válida: si algún campo vectorial $\mathbf{F}$ es irrotacional, es también potencial. Esta afirmación es correcta, lo que se deduce de los razonamientos dados en el final del § 7.

5) El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, para que $\text{div } \mathbf{F} = 0$, es decir, el campo vectorial que no tiene fuentes (véase el § 8) se llama *solenoidal*.

Demostremos que

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0, \quad (8)$$

es decir, que el campo de rotacionales es libre de fuentes.

En efecto, si $\mathbf{F} = iX + jY + kZ$, entonces:

$$\text{rot } \mathbf{F} = i \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)$$

y por esto:

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Aplicado el ∇ — operador, escribamos la igualdad (8) en la forma:

$$\nabla (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \quad (8')$$

El primer miembro de esta igualdad lo podemos considerar como un producto vectorial y escalar (mixto) de los tres vectores: ∇ , ∇ , $\mathbf{F}$, dos de los cuales son iguales. Es evidente que este producto es nulo.

6) Sea un campo escalar $u = u(x, y, z)$. Determinemos el campo de gradientes:

$$\text{grad } u = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Ahora hallemos:

$$\text{div}(\text{grad } u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

6

$$\text{div}(\text{grad } u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (9)$$

El segundo miembro de esta expresión se llama *operador de Laplace* de la función u y se designa

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (10)$$

Por consiguiente, podemos escribir la igualdad (9) en la forma:

$$\text{div}(\text{grad } u) = \Delta u. \quad (11)$$

Con ayuda del ∇ — operador escribamos la ecuación (11):

$$(\nabla \nabla u) = \Delta u. \quad (11')$$

Notemos que la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

6

$$\Delta u = 0 \quad (12')$$

se llama *ecuación de Laplace*. La función que satisface a esta ecuación se llama *función armónica*.

Ejercicios para el capítulo XV

Calcular las integrales curvilíneas siguientes:

1. $\int y^2 dx + 2xy dy$ a lo largo de la circunferencia $x = a \cos t$, $y = a \sin t$.

Respuesta: 0.

2. $\int y dx - x dy$ a lo largo del arco del elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Respuesta: $-2\pi ab$.

3. $\int \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy$ a lo largo de la circunferencia con el centro en el origen de coordenadas. Respuesta: 0.

4. $\int \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ a lo largo de un segmento de la recta $y = x$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$. Respuesta: $\ln 2$.

5. $\int yz dx + xz dy + xy dz$ a lo largo del hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$, cuando t varía desde 0 hasta 2π . Respuesta: 0.

6. $\int x dy - y dx$ a lo largo del arco de hipocicloide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Respuesta: $\frac{3}{4} \pi a^2$ (área duplicada de la hipocicloide).

7. $\int x dy - y dx$ a lo largo del lazo del folio de Descartes $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. Respuesta: $\frac{3}{2} a^2$ (área duplicada del dominio limitado por este lazo).

8. $\int x dy - y dx$ a lo largo de la curva $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Respuesta: $-6\pi a^2$ (área duplicada del dominio limitado por un arco de la cicloide y el eje Ox).

Demostrar que:

9. $\text{grad}(c\varphi) = c \text{ grad } \varphi$, donde c es constante.

10. $\text{grad}(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1 \text{ grad } \varphi + c_2 \text{ grad } \psi$, donde c es constante.

11. $\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi$.

12. Hallar $\text{grad } r$, $\text{grad } r^2$, $\text{grad } \frac{1}{r}$, $\text{grad } f(r)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Respuesta: $\frac{r}{r}$; $2r$; $-\frac{r}{r^3}$; $f'(r) \frac{r}{r}$.

13. Demostrar que $\text{div}(A+B) = \text{div } A + \text{div } B$.

14. Calcular $\text{div } r$, donde $r = xi + yj + zk$. Respuesta: 3.

15. Calcular $\text{div}(A\varphi)$, donde A es una función vectorial, y φ es una función escalar. Respuesta: $\varphi \text{ div } A + (\text{grad } \varphi) \cdot A$.

16. Calcular $\text{div}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c})$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante. Respuesta: $\frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{r}$.
17. Calcular $\text{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}A)$. Respuesta $\mathbf{AB}$.
 Demostrar que:
18. $\text{rot}(c_1 \mathbf{A}_1 + c_2 \mathbf{A}_2) = c_1 \text{rot} \mathbf{A}_1 + c_2 \text{rot} \mathbf{A}_2$, donde c_1 y c_2 son constantes.
19. $\text{rot}(A\mathbf{c}) = \text{grad} A \times \mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante.
20. $\text{rot} \text{rot} \mathbf{A} = \text{grad} \text{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$.
21. $\mathbf{A} \times \text{grad} \varphi = \text{rot}(\varphi \mathbf{A})$.

Integrales de superficie

22. Demostrar que $\iint \cos(nz) d\sigma = 0$, si σ es una superficie cerrada y $\mathbf{n}$ es su normal.

23. Hallar el momento de inercia, respecto al eje Oz , de la superficie de un segmento de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ separado por el plano $z = H$. Respuesta: $\frac{2\pi R}{3} (2R^3 - 3R^2H + H^3)$.

24. Hallar el momento de inercia, respecto al eje Oz , de una parte de la superficie del paraboloide de revolución $x^2 + y^2 = 2cz$, separada por el plano $z = c$. Respuesta: $\frac{16}{3} c^5$.

25. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de una parte de la superficie del cono $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$, separada por el plano $z = H$. Respuesta: $0; 0; \frac{2}{3} H$.

26. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un segmento de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, separado por el plano $z = H$. Respuesta: $(0, 0, \frac{R+H}{2})$.

27. Hallar $\iiint_{\sigma} [x \cos(nx) + y \cos(ny) + z \cos(nz)] d\sigma$, donde σ es una superficie cerrada. Respuesta: $3V$, donde V es el volumen del cuerpo limitado por σ .

28. Hallar $\iint_S z dx dy$, donde S es la superficie exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Respuesta: $\frac{4}{3} \pi R^3$.

29. Hallar $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, donde S es la superficie exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Respuesta: πR^4 .

30. Hallar $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} ds$, donde S es la superficie lateral del cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leq z \leq b$. Respuesta: $\frac{2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3}$.

31. Transformar, según la fórmula de Stokes, la integral $\int_L y dx + z dy + x dz$. Respuesta: $-\iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) ds$.

Hallar las integrales curvilíneas directamente y con ayuda de la fórmula de Stokes:

32. $\int_L (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$, donde L es una circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x+y+z=0$. Respuesta: 0.

33. $\int_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, donde L es una circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, $z=0$.
Respuesta: $-\frac{\pi R^6}{8}$.

Utilizando la fórmula de Ostrogradski, transformar las integrales de superficie en las de volumen:

34. $\iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds$. Respuesta: $\iiint_V 3 dx dy dz$.

35. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) (dy dz + dz dx + dx dy)$. Respuesta:

$$2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz.$$

36. $\iint_S xy dx dy + yz dy dz + zx dz dx$. Respuesta: 0.

37. $\iint_S \frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \frac{\partial u}{\partial y} dz dx + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy$. Respuesta:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz.$$

Usando la fórmula de Ostrogradski, calcular las siguientes integrales:

38. $\iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) ds$, donde S es la superficie de un elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Respuesta: $4\pi abc$.

39. $\iint_S (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) ds$, donde S es la superficie de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Respuesta: $\frac{12}{5} \pi R^5$.

40. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, donde S es la superficie de un cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ($0 \leq z \leq b$). Respuesta: $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

41. $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, donde S es la superficie de un cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $-H \leq z \leq H$. Respuesta: $3\pi a^2 H$.

42. Demostrar la identidad $\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds$, donde C es un contorno que limita el dominio D , y $\frac{\partial u}{\partial n}$, una derivada siguiendo la normal exterior.

Solución.

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int_C -Y dx + X dy = \int_C [-Y \cos(s, x) + X \sin(s, x)] ds,$$

donde (s, x) es el ángulo formado por la tangente al contorno C y el eje Ox . Si designamos por (n, x) el ángulo formado por la normal y el eje Ox ,

entonces $\operatorname{sen}(s, x) = \cos(n, x)$, $\cos(s, x) = -\operatorname{sen}(n, x)$. Por consiguiente,

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int_C [X \cos(n, x) + Y \operatorname{sen}(n, x)] ds. \text{ Poniendo } X = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$Y = \frac{\partial u}{\partial y}$, obtenemos:

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen}(n, x) \right) ds$$

ó

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

La expresión $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ se llama operador de Laplace.

43. Demostrar la identidad (así llamada *fórmula de Green*)

$$\iiint_V (v \Delta u - u \Delta v) dx dy dz = \iint_\sigma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma,$$

donde u y v son funciones continuas que tienen derivadas continuas hasta el segundo orden en el dominio D .

Los símbolos Δu y Δv significan:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Estas expresiones se llaman *operadores de Laplace* en el espacio.

Solución. En la fórmula

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_\sigma [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)] d\sigma$$

pongamos que

$$X = vu'_x - uv'_x,$$

$$Y = vu'_y - uv'_y,$$

$$Z = vu'_z - uv'_z.$$

Entonces

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = v(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}) - u(v''_{xx} + v''_{yy} + v''_{zz}) = v\Delta u - u\Delta v,$$

$$X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z) =$$

$$= v(u'_x \cos nx + u'_y \cos ny + u'_z \cos nz) - u(v'_x \cos nx + v'_y \cos ny + v'_z \cos nz) =$$

$$= v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Por tanto,

$$\iiint_V (v \Delta u - u \Delta v) dx dy dz = \iint_\sigma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma.$$

44. Demostrar la identidad

$$\iiint_V \Delta u \, dx \, dy \, dz = \iint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma,$$

donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (operador de Laplace).

Solución. En la fórmula de Green deducida en el ejemplo anterior pongamos $v=1$. Entonces $\Delta v=0$ y obtenemos la identidad mencionada.

45. Si $u(x, y, z)$ es una función armónica en cierto dominio, es decir, una función tal que en cualquier punto de este dominio satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

entonces

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0,$$

donde σ es una superficie cerrada.

Solución. Se infiere directamente de la fórmula dada en el problema 44.

46. Sea $u(x, y, z)$ una función armónica en cierto dominio V y supongamos que en el dominio V se encuentra una esfera $\bar{\sigma}$ con el centro en el punto $M(x_1, y_1, z_1)$ y el radio R . Demostrar que

$$u(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\bar{\sigma}} u \, d\sigma.$$

Solución. Examinemos el dominio Ω limitado por dos esferas $\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ de radios R y ρ ($\rho < R$) con centros en el punto $M(x_1, y_1, z_1)$. Apliquemos a este dominio la fórmula de Green deducida en el problema 43, designando con u la función arriba indicada y con v , la función

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}.$$

Realizando la derivación directa y sustitución nos convencemos que $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$. Por consiguiente,

$$\iint_{\bar{\sigma} + \bar{\sigma}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) d\sigma = 0,$$

$$\iint_{\bar{\sigma}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\bar{\sigma}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

En las superficies $\bar{\sigma}$ y $\bar{\sigma}$ la magnitud $\frac{1}{r}$ es constante $\left(\frac{1}{R} \right.$ y $\left. \frac{1}{\rho} \right)$ y por eso puede ser sacada fuera del signo de la integral. En virtud de la respuesta

obtenida en el problema 45, tenemos:

$$\frac{1}{R} \iint_{\underline{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0; \quad \frac{1}{\rho} \iint_{\underline{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Por tanto,

$$-\iint_{\underline{\sigma}} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma + \iint_{\underline{\sigma}} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma = 0,$$

pero,

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}.$$

Por eso

$$+ \iint_{\underline{\sigma}} u \frac{1}{r^2} d\sigma - \iint_{\underline{\sigma}} u \frac{1}{r^2} d\sigma = 0$$

ó

$$\frac{1}{\rho^2} \iint_{\underline{\sigma}} u d\sigma = \frac{1}{R^2} \iint_{\underline{\sigma}} u d\sigma. \quad (1)$$

Aplicamos el teorema de la media a la integral del segundo miembro:

$$\frac{1}{\rho^2} \iint_{\underline{\sigma}} u d\sigma = \frac{u(\xi, \eta, \zeta)}{\rho^2} \iint_{\underline{\sigma}} d\sigma, \quad (2)$$

donde $u(\xi, \eta, \zeta)$ es el punto sobre la superficie de una esfera de radio ρ y centro en el punto $M(x_1, y_1, z_1)$.

Hagamos que ρ tienda a cero; entonces $u(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow u(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{1}{\rho^2} \iint_{\underline{\sigma}} d\sigma = \frac{4\pi\rho^2}{\rho^2} = 4\pi.$$

Por consiguiente, cuando $\rho \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\frac{1}{\rho^2} \iint_{\underline{\sigma}} u d\sigma \rightarrow u(x_1, y_1, z_1) 4\pi.$$

Luego, puesto que el primer miembro de la igualdad (1) no depende de ρ , entonces para $\rho \rightarrow 0$, obtenemos definitivamente:

$$\frac{1}{R^2} \iint_{\underline{\sigma}} u d\sigma = 4\pi u(x_1, y_1, z_1)$$

6

$$u(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\underline{\sigma}} u d\sigma.$$